

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang
1977/1978
no 5
januari

Examennummer

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 32,–. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgende nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Inleiding

In dit nummer vindt men allerlei wetenswaardigheden omtrent de examens wiskunde voor LBO, LTO, MAVO-3, MAVO-4, HAVO en VWO eerste periode. Bovendien zijn de opgaven voor de tweede periode afgedrukt.
Door het CITO is een uitgebreid onderzoek gedaan naar de resultaten van de examens eerste periode voor wiskunde bij het MAVO-4, het MAVO-3 en het LTO, het overige LBO, het HAVO en het VWO.
Ten aanzien van de open vragen bij MAVO en de examens HAVO en VWO zijn de onderzoekingen gebaseerd op de uitslag van een enquête die onder een vrij beperkt aantal scholen gehouden is.
In dit examennummer is dankbaar van deze resultaten gebruik gemaakt. Echter slechts van een deel ervan. Wie volledig op de hoogte gebracht wil worden, kan de desbetreffende publikaties bij het CITO aanvragen. Ze worden gratis toegezonden. Het betreft:
CITO-memo 221 De eindexamens wiskunde voor MAVO in 1977;
CITO-memo 226 De eindexamens wiskunde voor LBO in 1977;
CITO-memo 229 De eindexamens wiskunde voor VWO en HAVO in 1977.
Adres van het CITO: Oeverstraat 65, Arnhem.
Men vindt in dit nummer verder verslag van een enquête gehouden door Daan Krins bij een aantal LTO-scholen met betrekking tot de open vragen.
Dan de resultaten van de examenbesprekingen gehouden door de NVvW. Deze besprekingen zijn gehouden voor MAVO en LTO direct na het bekend worden van de normen en voor HAVO en VWO in september.
Ten slotte nog een onderzoek door Drs. S. P. van 't Riet over de cognitieve vaardigheden die in het examen wiskunde I VWO getoetst zijn.
Het is niet meer mogelijk gebleken commentaren in dit nummer op te nemen, omdat de verschijning ervan dan te zeer vertraagd zou worden.

Uitleg over de verstrekte cijfers

In de gegevens van de toets- en itemanalyse komen enige uitdrukkingen en cijfers voor. De betekenis hiervan wordt hieronder uitgelegd.

p-*waarde en* a-*waarde*
Bij de vierkeuzevragen is één antwoord goed en de andere drie zijn fout. De onjuiste antwoorden noemt men afleiders.
Het percentage kandidaten dat het goede antwoord gekozen heeft, noemt men de p-waarde van het item.
Het percentage kandidaten dat een bepaalde afleider gekozen heeft, noemt men de a-waarde van die afleider.

Correlatie tussen een vraag en de totale toets (r_{it})
De r_{it} drukt de discriminerende waarde van een vraag uit. Een hoge r_{it} geeft aan dat de vraag goed discrimineert, d.w.z. 'goede' kandidaten maken de betrokken vraag goed en 'slechte' kandidaten maken de betrokken vraag fout. Een positieve lage r_{it} betekent: zowel 'goede' als 'slechte' kandidaten konden de vraag wel (of niet) maken. Een negatieve r_{it} betekent dat de 'slechte' kandidaten de vraag wel konden oplossen, terwijl de 'goede' kandidaten de vraag niet konden oplossen. Met de betrokken vraag is dan iets (merkwaardigs) aan de hand, omdat dit immers niet de bedoeling is van de toetsconstructeurs.
Indien $r_{it} = -1$ is er sprake van volledig negatieve correlatie en hebben alle 'goede' kandidaten de vraag fout en de 'slechte' kandidaten de vraag goed opgelost.
Indien $r_{it} = 0$ is er geen correlatie.
Als $r_{it} = 1$ is er volledig positieve correlatie tussen de vraag en de gehele toets.
(In plaats van bijv. $r_{it} = 0{,}23$ wordt ook wel vermeld $r_{it} = 23$.)

De toetsconstructeurs trachten voor examens items te construeren met bij voorkeur een r_{it}-waarde > 0,30 en een p-waarde die in de buurt van 60 ligt. Items die hieraan voldoen zijn vanuit psychometrisch oogpunt optimaal aangepast aan de populatie die de vragen moet beantwoorden.

De meerkeuzetoets MAVO-4 en MAVO-3/LTO-C

Dit jaar bestaat de MAVO-4-examentoets, evenals in vorige jaren, uit 30 items. De examentoets van MAVO-3/LTO-C heeft dit jaar ook 30 items, in tegenstelling tot de vorige jaren, toen deze toets uit 25 items bestond.
De examentoets voor MAVO-4 en die voor MAVO-3/LTO bevatten 9 gemeenschappelijke items (in vorige jaren 10 gemeenschappelijke items).
De examentoets van het C-programma voor LEAO/LHNO/LLO/LMO, die dit jaar afwijkend is van de toets voor MAVO-3/LTO, bevat eveneens 30 items waarvan er 15 gemeenschappelijk zijn met de toets voor MAVO-3/LTO en daarvan 5 gemeenschappelijk met de toets voor MAVO-4.

Verband tussen score en cijfer en cumulatieve percentages kandidaten met bepaalde score

cesuur 14/15		cumulatief percentage
score	cijfer	MAVO-4
0	1,2	–
1	1,5	–
2	1,8	–
3	2,1	–
4	2,4	–
5	2,7	–
6	3,0	1
7	3,2	1
8	3,5	2
9	3,8	4
10	4,1	7
11	4,4	10
12	4,7	15
13	5,0	21
14	5,3	28
15	5,6	36
16	5,9	45
17	6,2	54
18	6,5	62
19	6,8	70
20	7,1	78
21	7,4	84
22	7,7	89
23	7,9	93
24	8,2	96
25	8,5	98
26	8,8	99
27	9,1	99
28	9,4	100
29	9,7	100
30	10,0	100

cesuur 13/14		cumulatief percentage	
score	cijfer	MAVO-3	LTO
0	1,7	–	–
1	2,0	–	–
2	2,3	–	–
3	2,6	–	–
4	2,8	1	–
5	3,1	2	1
6	3,4	3	3
7	3,7	6	5
8	3,9	9	10
9	4,2	14	15
10	4,5	21	22
11	4,8	29	30
12	5,0	39	38
13	5,3	48	46
14	5,6	58	55
15	5,9	66	63
16	6,1	74	70
17	6,4	79	76
18	6,7	85	81
19	7,0	90	86
20	7,2	93	90
21	7,5	96	93
22	7,8	98	95
23	8,1	99	97
24	8,3	99	98
25	8,6	100	99
26	8,9	100	99
27	9,2	100	100
28	9,4	100	100
29	9,7	100	100
30	10,0	100	100

Bij de examens MAVO-4 en MAVO-3 meerkeuzeopgaven vindt men in de marge de p-waarde van het item (onderstreept) en de a-waarden van de afleiders. Tussen haakjes is daaronder de r_{it}-waarde van het item vermeld.
Bij de gemeenschappelijke opgaven zijn ook de p-, a- en r_{it}-waarden voor MAVO-3 en LTO resp. voor MAVO-4 opgegeven.

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

MAVO-4

Donderdag 12 mei, 9.30-11.30 uur

Wiskunde I

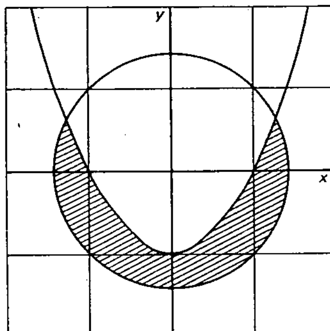
1. Het volledig origineel van 0 van de functie $x \rightarrow x^2 - 2x + 1$ is

			M3	LTO
3	A	ϕ	10	9
6	B	$\{-1\}$	11	12
<u>88</u>	C	$\{1\}$	<u>71</u>	<u>69</u>
4	D	$\{-1, 1\}$	9	10
(22)			(31)	(36)

2. $\begin{pmatrix} a \\ 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ 6 \end{pmatrix} =$

10 A $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
10 B $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
3 C $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
<u>77</u> D $\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$
(30)

3. In onderstaand assenstelsel zijn de grafieken getekend van de relaties
$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$ en
$\{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$.
Voor de coördinaten van elk punt (x, y) van het gearceerde vlakdeel geldt
3 A $x^2 + y^2 \geqq 2 \wedge y \geqq x^2 - 1$
6 B $x^2 + y^2 \geqq 2 \wedge y \leqq x^2 - 1$
36 C $x^2 + y^2 \leqq 2 \wedge y \geqq x^2 - 1$
<u>55</u> D $x^2 + y^2 \leqq 2 \wedge y \leqq x^2 - 1$
(33)



4. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2 - x > 0\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid -x + 1 < 3\}$ bevat

30 A geen elementen
16 B precies 2 elementen
29 C precies 3 elementen
25 D meer dan 3 elementen
(32)

5. De grafiek van de functie $f : x \to x^2 + px - 6$ heeft het punt $(0, q)$ als top.
Voor p en q geldt

16 A $p \geqq 0 \wedge q \geqq 0$
62 B $p \geqq 0 \wedge q < 0$
7 C $p < 0 \wedge q \geqq 0$
15 D $p < 0 \wedge q < 0$
(32)

6. De omtrekken van twee cirkels verhouden zich als 1 en a.
De oppervlakten van deze cirkels verhouden zich als

14 A 1 en a
48 B 1 en a^2
8 C 1 en πa
30 D 1 en πa^2
(38)

7. Van de tien waarnemingsgetallen 6, 7, 5, 5, 4, 6, 6, 7, 7, p is de modus gelijk aan de mediaan.
Er geldt

			M3	LTO
1	A	$p = 4$	3	7
8	B	$p = 5$	10	10
85	C	$p = 6$	77	71
6	D	$p = 7$	10	12
(22)			(25)	(28)

8. Welke van onderstaande relaties is *geen* functie?

			M3	LTO
48	A	$\{(x, y) \mid x = 2\}$	28	29
24	B	$\{(x, y) \mid y = 2\}$	24	31
8	C	$\{(x, y) \mid x + y = 2\}$	15	13
20	D	$\{(x, y) \mid x - y = 2\}$	33	27
(38)			(39)	(35)

9. Van $\triangle ABC$ is $AB = a$ en $AC = BC = b$
cos $\triangle ABC =$

27	A	$\frac{a}{b}$	46	44
24	B	$\frac{b}{a}$	28	27
44	C	$\frac{a}{2b}$	19	22
5	D	$\frac{2b}{a}$	7	6
(38)			(27)	(35)

10. $\{x \mid x(x - 1) = x(1 - x)\} =$

13	A	ϕ	26	27
15	B	$\{0\}$	22	20
10	C	$\{1\}$	17	20
63	D	$\{0, 1\}$	36	32
(40)			(44)	(41)

11. Welke van onderstaande vergelijkingen heeft als oplossingsverzameling de lege verzameling?

2	A	$x = 2$	4	5
11	B	$x = 2x$	17	16
17	C	$2x = 2x$	23	32
69	D	$2x = 2x + 2$	56	46
(37)			(38)	(44)

12. De oplossingsverzameling van de vergelijking $-3(x - 1) = \dfrac{x - 1}{-3}$ is

22	A	ϕ	37	31
8	B	$\{0\}$	10	12
57	C	$\{1\}$	29	31
13	D	$\mathbb{R}$	24	25
(42)			(31)	(38)

13. Bij vermenigvuldiging ten opzichte van $O(0, 0)$ met factor $-\frac{1}{2}$ gaat de puntverzameling $V = \{(-4, -3), (8, -3), (-4, 6)\}$ over in V'.
Het aantal roosterpunten van V' bedraagt

4	A	0	8	7
43	B	1	24	21
4	C	2	6	8
50	D	3	62	63
(31)			(32)	(22)

14. We beschouwen de verzameling vectoren $\vec{OP}$ met beginpunt in de oorsprong en eindpunt in het *tweede* kwadrant.
Het aantal vectoren $\vec{OP}$ met $|\vec{OP}| = 5$ bedraagt

21 A 2
11 B 4
2 C 5
66 D meer dan 5
(31)

15. Bij spiegeling in een lijn l is B het beeld van een punt A.
(1) Voor elk punt P van l geldt $PA = PB$.
(2) Voor elk punt P van l geldt $PA = \frac{1}{2}AB$.

22 A (1) en (2) zijn beide waar
76 B (1) is waar, (2) is niet waar
0 C (1) is niet waar, (2) is waar
2 D (1) en (2) zijn beide niet waar
(21)

16. Bij een lijnspiegeling wordt de grafiek van $y = x^2 - 2x - 3$ op zichzelf afgebeeld.
Welk van onderstaande punten wordt hierbij op zichzelf afgebeeld?

40 A $(1, -3)$
29 B $(2, -3)$
29 C $(-1, 0)$
3 D $(-2, 0)$
(26)

17. Gegeven zijn de lijn l en het punt P met $P \notin l$.
Het aantal cirkels door P die l raken, bedraagt

4 A 0
28 B 1
17 C 2
51 D meer dan 2
(19)

18. De punten A, B en C liggen op een cirkel met straal 4.
$AB = 8$, $AC = 6$.
Voor de grootte α van hoek BAC geldt

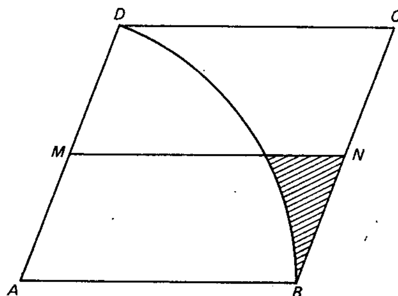
19 A $\alpha \leqq 40°$
56 B $40° < \alpha \leqq 45°$
16 C $45° < \alpha \leqq 50°$
9 D $50° < \alpha$
(25)

19. Van de ruit $ABCD$ is $AC = 15$ en $BD = 8$.
Voor de grootte α van hoek BAD geldt

16	A	$\alpha \leqq 50°$
12	B	$50° < \alpha \leqq 55°$
56	C	$55° < \alpha \leqq 60°$
16	D	$60° < \alpha$
(28)		

20. In onderstaande ruit $ABCD$ is een deel van de cirkel getekend met punt A als middelpunt en AB als straal.
Punt M is het midden van lijnstuk AD en punt N van lijnstuk BC.
Voor elk punt P van het gearceerde vlakdeel geldt

9	A	$d(P, AB) \geqq d(P, DC) \wedge PA \geqq AB$
3	B	$d(P, AB) \geqq d(P, DC) \wedge PA \leqq AB$
83	C	$d(P, AB) \leqq d(P, DC) \wedge PA \geqq AB$
5	D	$d(P, AB) \leqq d(P, DC) \wedge PA \leqq AB$
(28)		

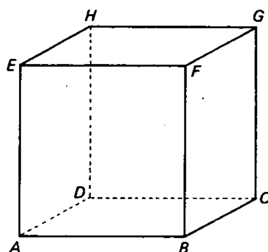


21. $\{x \mid x^2 + 5x < 6\} =$

6	A	$\{x \mid x < -3 \vee x > -2\}$
7	B	$\{x \mid -3 < x < -2\}$
16	C	$\{x \mid x < -6 \vee x > 1\}$
71	D	$\{x \mid -6 < x < 1\}$
(29)		

22. Van een kubus $ABCD.EFGH$ is gegeven $BG = 2$.
De inhoud van deze kubus bedraagt

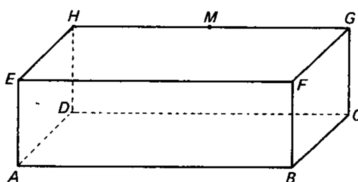
			M3	LTO
14	A	1	17	8
62	B	$2\sqrt{2}$	36	48
12	C	8	20	15
12	D	$8\sqrt{2}$	28	28
(40)			(34)	(45)



23. Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 10$, $AE = 3$ en $AD = 4$.
M is het midden van ribbe GH.

Voor de grootte α van hoek AMB geldt

9 A $60° \leqq \alpha < 70°$
6 B $70° \leqq \alpha < 80°$
18 C $80° \leqq \alpha < 90°$
66 D $90° \leqq \alpha < 100°$
(41)



24. Van $\triangle ABC$ is gegeven $\angle A = 60°$, $AC = 4$ en de oppervlakte is 6.
$AB =$

13 A $\sqrt{3}$
19 B 3
55 C $2\sqrt{3}$
12 D 6
(27)

25. Van de vectoren $\vec{OP}$ en $\vec{OQ}$ is gegeven $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}|$ en $< POQ = 90°$.
Als $\vec{v} = \vec{OP} - \vec{OQ}$, dan geldt $|\vec{v}| =$

27 A $|\vec{o}|$
6 B $|\vec{OP}|$
56 C $\sqrt{2}|\vec{OP}|$
11 D $2|\vec{OP}|$
(46)

26. Van een functie f gedefinieerd door $f(x) = ax + b$ is het domein $[-2, 4]$ en het bereik $[-1, 2]$.
Voor a en b kan gelden

29 A $a > 0 \wedge b > 0$
27 B $a > 0 \wedge b < 0$
34 C $a < 0 \wedge b > 0$
9 D $a < 0 \wedge b < 0$
(04)

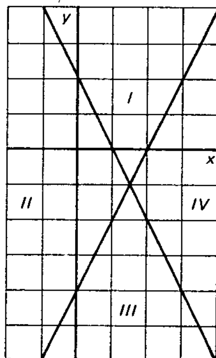
27. De functie f is gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
De functie g is gedefinieerd door $g(x) = -x^2 - 3x + 1$.
(1) Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(x) + g(x) \geqq 0$.
(2) Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(x) - g(x) \geqq 0$.

16 A (1) en (2) zijn beide waar
21 B (1) is waar, (2) is niet waar
28 C (1) is niet waar, (2) is waar
35 D (1) en (2) zijn beide niet waar
(23)

28. In onderstaande figuur verdelen de grafieken van $2x + y = 2$ en $2x - y = 4$

het vlak in de vier delen I, II, III en IV.
In welk vlakdeel geldt voor de coördinaten x en y van elk punt:
$2x + y > 2 \wedge 2x - y < 4$?

69 A I
8 B II
5 C III
18 D IV
(29)



29. Voor $a \neq 0$ snijdt de grafiek van $y = ax - a$ *niet*

11 A de positieve x-as
47 B de negatieve x-as
27 C de positieve y-as
14 D de negatieve y-as
(32)

30. Gegeven zijn de relaties $V = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$
en $W = \{(x, y) \mid y = -x^2 + 4\}$.

Het aantal gemeenschappelijke punten van de grafieken van V en W bedraagt

20	A	1
34	B	2
42	C	3
4	D	4
(39)		

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

MAVO-3

Donderdag 12 mei, 9.30-11.30 uur

Wiskunde I

(tevens voor LTO-C)

1. Bij een translatie is het punt (7, 2) het beeld van het punt (4, 3).
Deze translatie wordt aangegeven door

M3	LTO		
5	4	A	$\binom{1}{-3}$
28	27	B	$\binom{-3}{1}$
9	9	C	$\binom{-1}{3}$
58	60	D	$\binom{3}{-1}$
(26)	(28)		

2. Welk van onderstaande getallenparen is een element van $\{(x, y) \mid 2x = 6 - y\}$?

3	5	A	$(-4, 2)$
10	13	B	$(4, 2)$
4	6	C	$(-4, -2)$
83	76	D	$(4, -2)$
(34)	(36)		

3. Gegeven is de functie $f: x \to \frac{1}{2}x - 4$.
$f(-2) =$

70	70	A	-5
4	5	B	-4
10	19	C	-3
16	17	D	4
(30)	(43)		

4. Gegeven is de functie $f: x \to x^2 + x + 1$.
Er geldt

M3	LTO		
10	9	A	$f(2) = f(0)$
15	16	B	$f(2) = f(-1)$
15	16	C	$f(2) = f(-2)$
61	60	D	$f(2) = f(-3)$
(44)	(51)		

5. In een gelijkbenige $\triangle ABC$ is $\angle A = 80°$.
$\angle B$ kan *niet* gelijk zijn aan

25	20	A	20°
30	37	B	40°
18	20	C	50°
27	22	D	80°
(36)	(39)		

6. Van $\triangle ABC$ is $\angle A = \alpha$, met $\tan \alpha < 0$.
Er geldt

17	16	A	$\sin \alpha > 0 \wedge \cos \alpha > 0$
31	26	B	$\sin \alpha > 0 \wedge \cos \alpha < 0$
32	36	C	$\sin \alpha < 0 \wedge \cos \alpha > 0$
21	22	D	$\sin \alpha < 0 \wedge \cos \alpha < 0$
(21)	(21)		

7. (1) $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{2}x - 4 = -5\} = \phi$
(2) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{2}x - 4 = -5\} = \phi$

9	10	A	(1) en (2) zijn beide waar
39	36	B	(1) is waar en (2) is niet waar
39	42	C	(1) is niet waar en (2) is waar
13	11	D	(1) en (2) zijn beide niet waar
(19)	(22)		

8. $x - 2$ is *geen* factor van

15	15	A	$x^2 - 4x + 4$
13	12	B	$x^2 - 4$
12	16	C	$2x - 4$
59	57	D	$-2x - 4$
(36)	(31)		

9. Welke van onderstaande beweringen is waar?

4	5	A	$3 \in \{x \mid x - 3 < -3\}$
81	75	B	$3 \in \{x \mid -x - 3 < 3\}$
7	9	C	$3 \in \{x \mid x - 3 > 3\}$
8	11	D	$3 \in \{x \mid -x - 3 > -3\}$
(31)	(34)		

10. Van de tien waarnemingsgetallen 6, 7, 5, 5, 4, 6, 6, 7, 7, p is de modus gelijk aan de mediaan.
Er geldt

M3	LTO			M4
3	7	A	$p = 4$	1
10	10	B	$p = 5$	8
77	71	C	$p = 6$	85
10	12	D	$p = 7$	6
(25)	(28)			(22)

11. Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90°$ en $\angle B = 60°$. De oppervlakte is $8\sqrt{3}$.
$BC =$

36	22	A	$2\sqrt{3}$
13	14	B	4
29	29	C	$4\sqrt{3}$
22	35	D	8
(27)	(47)		

12. Gegeven is het parallellogram $ABCD$ met $AB \neq AD$.
$\triangle ACD$ kan *niet* worden afgebeeld op $\triangle CAB$ door een

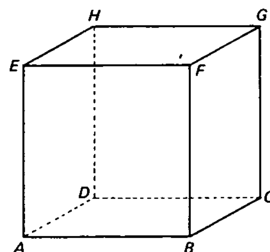
12	14	A	puntspiegeling
47	46	B	lijnspiegeling
14	15	C	rotatie
28	25	D	vermenigvuldiging
(32)	(32)		

13. Bij een rotatie over hoek α is het lijnstuk $P'Q'$ het beeld van het lijnstuk PQ.
(1) Voor elke α geldt lijnstuk PQ is evenwijdig met lijnstuk $P'Q'$.
(2) Voor elke α geldt $PQ = P'Q'$.

15	16	A	(1) en (2) zijn beide waar
12	10	B	(1) is waar en (2) is niet waar
59	65	C	(1) is niet waar en (2) is waar
14	9	D	(1) en (2) zijn beide niet waar
(32)	(39)		

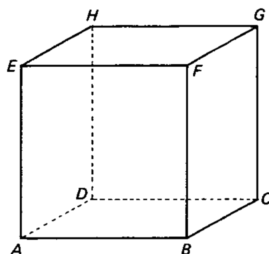
14. Van een kubus $ABCD.EFGH$ is de ribbe 2.
Het punt P is het midden van de ribbe AD.
De oppervlakte van $\triangle HCP$ is gelijk aan

10	12	A	$\sqrt{3}$
38	35	B	$2\sqrt{3}$
18	20	C	$\sqrt{6}$
34	33	D	$2\sqrt{6}$
(25)	(28)		



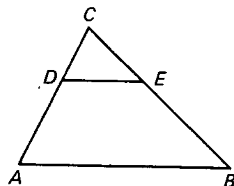
15. Van een kubus *ABCD.EFGH* is de ribbe 2.
Het punt *P* is het midden van de ribbe *AD*.
Het punt *Q* is het midden van de ribbe *HG*.
Voor de grootte α van $\angle HPQ$ geldt

M3	LTO		
23	22	A	$\alpha < 22°$
19	21	B	$22° \leqq \alpha < 24°$
37	35	C	$24° \leqq \alpha < 26°$
20	23	D	$26° \leqq \alpha$
(26)	(28)		



16. Gegeven is $\triangle ABC$.
Op het lijnstuk *AC* ligt het punt *D* zo, dat *AD* en *DC* zich verhouden als 3 en 2.
Op het lijnstuk *BC* ligt het punt *E* zo, dat lijnstuk *DE* evenwijdig is met lijnstuk *AB*.
De oppervlakten van

20	16	A	3 en 2
14	20	B	5 en 2
52	46	C	9 en 4
13	18	D	25 en 4
(22)	(34)		



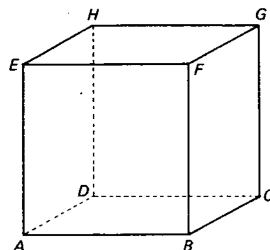
17. Van $\triangle ABC$ is $AB = a$ en $AC = BC = b$.
$\cos \angle ABC =$

				M4
46	44	A	$\frac{a}{b}$	27
28	27	B	$\frac{b}{a}$	24
19	22	C	$\frac{a}{2b}$	44
7	6	D	$\frac{2b}{a}$	5
(27)	(35)			(38)

18. De grafiek van de relatie $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$ gaat door de punten (5, 2) en (4, 3).
Er geldt

10	13	A	$a = 1 \wedge b = 7$
70	69	B	$a = -1 \wedge b = 7$
13	12	C	$a = 1 \wedge b = -3$
6	7	D	$a = -1 \wedge b = -3$
(44)	(42)		

19. Van een kubus $ABCD.EFGH$ is gegeven $BE = 2$.
De inhoud van deze kubus bedraagt



M3	LTO			M4
17	8	A	1	14
36	48	B	$2\sqrt{2}$	62
20	15	C	8	12
28	28	D	$8\sqrt{2}$	12
(34)	(45)			(40)

20. Bij vermenigvuldiging ten opzichte van $O(0, 0)$ met factor $-\frac{1}{2}$ gaat de puntverzameling $V = \{(-4, -3), (8, -3), (-4, 6)\}$ over in V'.
Het aantal roosterpunten van V' bedraagt

8	7	A	0	4
24	21	B	1	43
6	8	C	2	4
62	63	D	3	50
(32)	(22)			(31)

21. Gegeven zijn de puntverzamelingen $V = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 6\}$ en $W = \{(x, y) \mid y = 2x + 4\}$.
Het element van $V \cap W$ is een punt van het

36	35	A	eerste kwadrant
44	45	B	tweede kwadrant
9	10	C	derde kwadrant
11	10	D	vierde kwadrant
(34)	(33)		

22. (1) Twee vierkanten met gelijke oppervlakten zijn congruent.
(2) Twee rechthoeken met gelijke oppervlakten zijn congruent.

20	19	A	(1) en (2) zijn beide waar
65	71	B	(1) is waar en (2) is niet waar
6	4	C	(1) is niet waar en (2) is waar
9	6	D	(1) en (2) zijn beide niet waar
(32)	(24)		

23. Welke van onderstaande vergelijkingen heeft als oplossingsverzameling de lege verzameling?

4	5	A	$x = 2$	2
17	16	B	$x = 2x$	11
23	32	C	$2x = 2x$	17
56	46	D	$2x = 2x + 2$	69
(38)	(44)			(37)

24. $\{x \mid x(x-1) = x(1-x)\} =$

M3	LTO			M4
26	27	A	ϕ	13
22	20	B	$\{0\}$	15
17	20	C	$\{1\}$	10
36	32	D	$\{0, 1\}$	63
(44)	(41)			(40)

25. Het volledig origineel van 0 van de functie $x \rightarrow x^2 - 2x + 1$ is

M3	LTO			M4
10	9	A	ϕ	3
11	12	B	$\{-1\}$	6
71	69	C	$\{1\}$	88
9	10	D	$\{-1, 1\}$	4
(31)	(36)			(22)

26. Welke van onderstaande relaties is *geen* functie?

M3	LTO			M4
28	29	A	$\{(x, y) \mid x = 2\}$	48
24	31	B	$\{(x, y) \mid y = 2\}$	24
15	13	C	$\{(x, y) \mid x + y = 2\}$	8
33	27	D	$\{(x, y) \mid x - y = 2\}$	20
(39)	(35)			(39)

27. $a^2 < 0$ is waar voor

M3	LTO		
88	87	A	geen enkele waarde van a
5	4	B	precies één waarde van a
2	2	C	precies twee waarden van a
5	7	D	meer dan twee waarden van a
(27)	(30)		

28. Gegeven zijn de puntverzamelingen $V = \{(x, y) \mid y > x\}$ en $W = \{(x, y) \mid -y < x + 1\}$.
$V \cap W$ bevat punten uit

M3	LTO		
21	21	A	precies 1 kwadrant
35	36	B	precies 2 kwadranten
22	23	C	precies 3 kwadranten
22	19	D	alle kwadranten
(21)	(18)		

29. De oplossingsverzameling van de vergelijking $-3(x-1) = \frac{x-1}{-3}$ is

M3	LTO			M4
37	31	A	ϕ	22
10	12	B	$\{0\}$	8
29	31	C	$\{1\}$	57
24	25	D	$\mathbb{R}$	13
(31)	(38)			(42)

30. Gegeven zijn de niet-samenvallende punten A en B.
$\{P \mid PA = 3\} \cap \{P \mid PA = PB\} = \phi$.
Voor AB geldt

M3	LTO		
9	9	A	$0 < AB \leqq 1$
31	31	B	$1 < AB \leqq 3$
39	39	C	$3 < AB \leqq 6$
20	20	D	$6 < AB$
(26)	(26)		

De openvragentoets MAVO-4 en MAVO-3

Het examen wiskunde voor MAVO-4 werd gemaakt door 37.962 en voor MAVO-3 door 1.357 kandidaten.
Van de scholen met MAVO-4 is een aselecte steekproef genomen van ongeveer 50 scholen. Aan de leraren van deze scholen is gevraagd de scoreresultaten van de kandidaten in te vullen op een scoreformulier. De response was ongeveer 50%.
Wat betreft het MAVO-3 werd alleen van die scholen medewerking gevraagd die de vakken nederlands, wiskunde, natuur- en scheikunde en handelskennis onderwezen. De (niet aselecte) steekproef bestond uit 50 scholen met een response van 50%.
De op het CITO ontvangen scoreformulieren betreffen 457 leerlingen van MAVO-4 en 195 leerlingen van MAVO-3.

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

MAVO-4

Dinsdag 17 mei, 9.30-11.30 uur

Wiskunde II

1. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(4, 2)$ en $B(0, 3)$ met de plaatsvectoren $\vec{OA} = \vec{a}$ en $\vec{OB} = \vec{b}$.
   a. Bereken de kentallen van de vectoren
   $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}$ en
   $\vec{OQ} = 1\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$.
   b. Toon aan dat de punten B, P en Q op één lijn liggen.
   c. Bereken in graden nauwkeurig de hoek van de vectoren $\vec{OP}$ en $\vec{OQ}$.

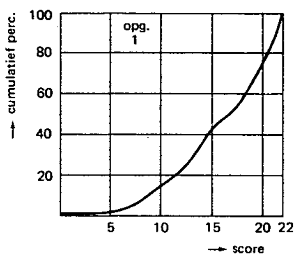
2. Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 10$, $BC = 4$ en $CG = 4$.
Op de ribbe EF ligt punt P zo, dat $EP = 3$.
Op de ribbe AB ligt een variabel punt Q met $BQ = x$ voor elke $x \in [0, 10]$.
a. Neem $x = 4$ en bereken de omtrek van $\triangle PQC$.
b. Neem $x = 4$ en bereken in graden nauwkeurig $\angle PQC$.
c. Voor welke x geldt $CP = CQ$?

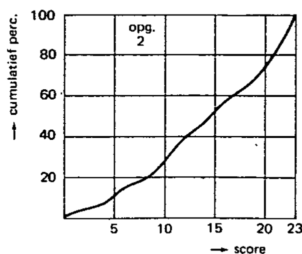
3. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de cirkel C met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$ en de lijn l met vergelijking $x - 2y = 0$.
a. Bereken de coördinaten van de snijpunten van C en l.
Teken C en l in het assenstelsel.
b. Bij translatie over de vector $\binom{5}{0}$ is de cirkel C' het beeld van C.
Stel een vergelijking op van C' en toon door berekening aan dat l een raaklijn is van C'.
c. Gegeven is dat l ook raaklijn is van het beeld van C bij translatie over de vector $\binom{0}{p}$.
Bereken p en de coördinaten van het bijbehorende raakpunt.

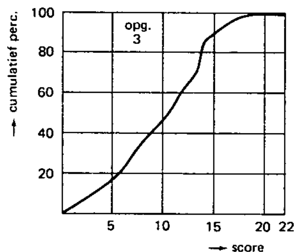
4. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ zijn gegeven de drie getallen 2, $2x$ en $\frac{1}{2}x^2$.
a. Voor welke x is het gemiddelde van de drie getallen gelijk aan 6?
b. Voor welke x is de som van de drie getallen kleiner dan 2?
c. Teken in één figuur de grafieken van de functies
$f: x \to 2$, $g: x \to 2x$ en $h: x \to \frac{1}{2}x^2$.
Lees uit de figuur af voor welke x twee van de drie getallen 2, $2x$ en $\frac{1}{2}x^2$ gelijk zijn.
Bereken voor elke gevonden x de drie getallen.

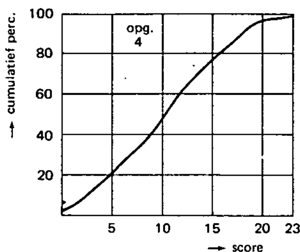
Scoreresultaten MAVO-4 (457 kandidaten)

onderdeel	maximaal te behalen score	gemiddelde score	p-waarde	r_{it}
1 a	7	6,44	0,92	0,29
b	7	4,25	0,61	0,46
c	8	5,65	0,71	0,62
2 a	8	6,27	0,78	0,55
b	8	4,48	0,56	0,59
c	7	4,05	0,58	0,63
3 a	7	5,52	0,79	0,63
b	7	4,13	0,59	0,70
c	8	0,71	0,09	0,46
4 a	7	3,98	0,57	0,59
b	7	2,81	0,40	0,62
c	9	4,38	0,49	0,54









Aantal scorepunten in mindering gebracht voor rekenfouten en/of verschrijvingen (457 kandidaten)

aftrek	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c
geen	429	440	359	388	339	448	416	427	449	435	422	449
1 punt	27	13	67	51	96	8	35	24	6	18	29	7
2 punten	1	4	22	15	16	1	4	4	2	4	5	1
meer dan 2 punten	–	–	9	3	6	–	2	2	–	–	1	–

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

MAVO-3

Dinsdag 17 mei, 9.30-11.30 uur

Wiskunde II

(tevens voor LTO-C)

1. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de lijn l met vergelijking $x-y=0$ en de lijn m met vergelijking $x+2y=6$.
   Het snijpunt van deze lijnen is het punt S.

a. Bereken de coördinaten van S en teken de lijnen l en m.
Bij de rotatie om O over 90° is l' het beeld van l en m' het beeld van m.
b. Geef de coördinaten van het beeld van S.
c. Stel een vergelijking op van l' en een van m'.

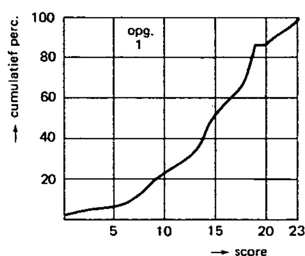
2. Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 6$ en $AD = AE = 4$.
Het midden van de ribbe AB is het punt M.
Het verlengde van het lijnstuk CM snijdt het verlengde van de ribbe DA in het punt S.
a. Bewijs dat $ME = MS$.
b. Bereken in graden nauwkeurig $\angle EMS$.
c. Bewijs dat $\triangle CES$ rechthoekig is.

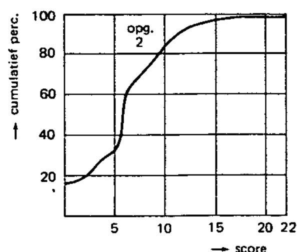
3. Met $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqq x \leqq 2\}$ als domein zijn de functies f, g en h gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = -x^2 + 4$ en $h(x) = -2x + 4$.
a. Bereken het minimum van $f(x)$ en het maximum van $g(x)$.
b. Los op $f(x) = g(x)$,
$f(x) = h(x)$ en
$g(x) = h(x)$.
c. Teken de grafieken van f, g en h in één figuur.
d. Los op $f(x) + g(x) + h(x) = 4$.

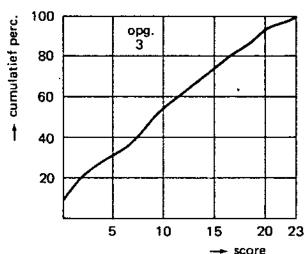
4. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(8, 8)$ en $M(6, 2)$.
a. Toon aan door berekening dat $\triangle AMO$ gelijkbenig is.
b. Bereken in graden nauwkeurig $\angle OAM$.
Het punt M is het middelpunt van een cirkel door het punt $O(0, 0)$.
Het punt A' is het midden van het lijnstuk OA.
Bij een vermenigvuldiging met centrum O en factor k is A' het beeld van A.
c. Bereken k en teken het beeld van de gegeven cirkel.
d. Bereken de oppervlakte van de beeldcirkel.

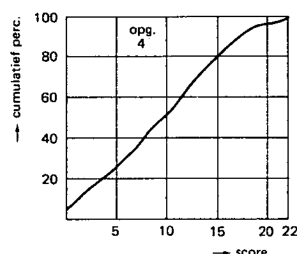
Scoreresultaten MAVO-3 (195 kandidaten)

onderdeel	maximaal te behalen score	gemiddelde score	p-waarde	r_{it}
1 a	8	6,40	0,80	0,64
b	8	5,20	0,65	0,44
c	7	3,08	0,44	0,62
2 a	9	4,80	0,53	0,42
b	7	1,01	0,14	0,51
c	6	0,81	0,14	0,41
3 a	6	2,18	0,36	0,58
b	6	2,40	0,40	0,64
c	6	3,15	0,53	0,68
d	5	2,49	0,50	0,55
4 a	6	4,33	0,72	0,52
b	6	2,24	0,37	0,62
c	5	1,89	0,38	0,48
d	5	1,45	0,29	0,50









Aantal punten in mindering gebracht voor rekenfouten en/of verschrijvingen
(195 kandidaten)

aftrek	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	4d
geen	173	191	183	171	180	192	186	173	193	190	176	182	195	185
1 punt	17	1	9	23	11	2	6	14	2	5	12	11	–	8
2 punten	5	3	3	1	3	1	2	3	–	–	7	2	–	2
meer dan 2 punten	–	–	–	–	1	–	1	5	–	–	–	–	–	–

Verband tussen score en cijfer en cumulatieve percentages kandidaten met een bepaalde score

		cumulatief percentage		
score	cijfer	LEAO	LHNO	LLO
0	1,7	–	–	–
1	2,0	–	–	–
2	2,3	–	1	–
3	2,6	–	2	–
4	2,8	1	4	1
5	3,1	2	7	2
6	3,4	5	14	4
7	3,7	8	22	8
8	3,9	14	30	13
9	4,2	21	40	19
10	4,5	29	49	26
11	4,8	39	58	33
12	5,0	50	68	42
13	5,3	58	74	50
14	5,6	66	79	59
15	5,9	73	83	66
16	6,1	78	88	73
17	6,4	84	91	80
18	6,7	88	94	85
19	7,0	91	96	88
20	7,2	94	97	92
21	7,5	96	98	95
22	7,8	97	98	97
23	8,1	98	99	98
24	8,3	99	99	99
25	8,6	100	100	99
26	8,9	100	100	99
27	9,2	100	100	100
28	9,4	100	100	100
29	9,7	100	100	100
30	10,0	100	100	100

Analyse van de resultaten behaald door LTO-kandidaten op het examen open vragen LTO-C/MAVO-3

Door D. P. M. Krins (Utrecht) is een onderzoek gedaan naar de resultaten die LTO-kandidaten behaald hebben op het schriftelijk examen open vragen. Hieronder vindt men een overzicht van de uit het onderzoek gedistilleerde uitkomsten.

Analyse van de gegevens van de voorcorrectie

item	gemiddelde score	relatief percentage	voorgestelde normering
1a	6,60	83	8
1b	3,60	60	6
1c	3,35	42	8
2a	5,60	70	8
2b	1,19	15	8
2c	0,77	11	7
3a	3,03	51	6
3b	2,35	39	6
3c	3,63	61	6
3d	2,69	54	5
4a	3,23	81	4
4b	3,24	54	6
4c	2,81	40	7
4d	1,21	24	5

Overzicht van de gegevens per school

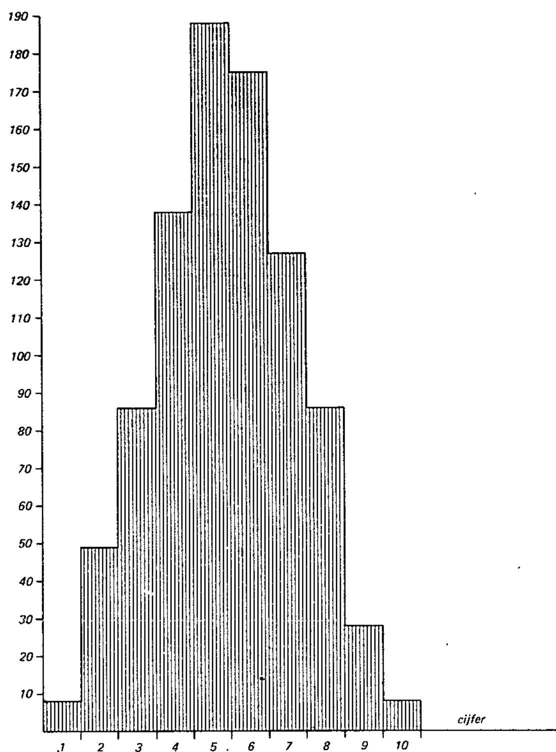
school	aantal punten	aantal kandidaten	gemiddelde	gemiddelde schoolonderzoek	jaaruren wiskunde
12	1617	31	5,22	6,48	10
36	1841	38	4,84	5,75	18
48	1573	35	4,49	6,38	13
72	2630	40	6,58	6,39	17
96	1016	22	4,62	6,51	9
108	3038	57	5,33	5,86	14
120	2781	47	5,92	6,35	12
132	2478	52	4,77	?	13
144	1420	24	5,92	6,36	10
156	3472	61	5,69	5,59	14
167	1908	28	6,81	6,56	15
180	1496	31	4,83	6,23	14
192	2707	48	5,64	6,57	16
204	3102	56	5,53	6,97	17
228	2063	37	5,58	6,51	13
240	1925	38	5,07	6,20	14
252	2669	59	4,52	5,59	14
264	3519	53	6,64	6,77	20
276	1647	45	3,66	5,95	13
288	2354	51	4,62	?	14
300	1272	19	6,69	6,71	14
312	1089	21	5,19	5,80	14

Gemiddelde schriftelijk examen: 5,33
Gemiddelde schoolonderzoek : 6,32

Totaal aantal kandidaten in de steekproef: 893

Frequentie-distributie

klasse	frequentie	cumulatieve frequentie	cumulatief percentage
1– 14	8	8	0,9
15– 24	49	57	6,4
25– 34	86	143	16,0
35– 44	138	281	31,5
45– 54	188	469	52,5
55– 64	175	644	72,1
65– 74	127	771	86,3
75– 84	86	857	96,0
85– 94	28	885	99,1
95–100	8	893	100


190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
cijfer
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Samenvatting van de examenbesprekingen MAVO-4

Op 26 mei j.l. werden in 30 plaatsen in het land bijeenkomsten gehouden om het open werk wiskunde van het MAVO-4-examen van 1977 te bespreken.
Deze bijeenkomsten, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, werden bijgewoond door 800 à 900 leraren, waarvan bijna de helft lid van genoemde vereniging.
Op veel bijeenkomsten werd het overlijden herdacht van de heer Van Beek, die een groot aandeel had in de organisatie.
Dankzij de goede zorgen van de CVO sloot het uitkomen van de normen goed aan op de vergaderdatum. Op 24 mei had de NVvW een bijeenkomst belegd van CVO-leden en gespreksleiders, zodat deze laatsten met enige achtergrondkennis de bijeenkomsten van 26 mei konden leiden.
Evenals vorig jaar was het doel van de besprekingen tweeledig.

- Een bespreking van de normen met een discussie over moeilijkheden waarop men bij de correctie zou kunnen stuiten. In die gevallen zou men tot een nadere verfijning kunnen komen binnen de bindende normen.
- Een bespreking van de opgaven voor wat betreft niveau en redactie.

Er was dit jaar niet aangedrongen op een bespreking van de meerkeuzevragen. Vorig jaar bleek dat op de meeste bijeenkomsten de tijd van ongeveer twee uren niet voldoende was om het meerkeuzewerk uitvoerig te bespreken. Toch was er hier en daar een opmerking over het werk. Op vijf bijeenkomsten vond men het werk moeilijker dan in andere jaren; ook achtten sommigen het maken van twee meerkeuzewerken op één dag (wiskunde en frans) nadelig voor de kandidaten.

De open vragen

Vraagstuk 1

Niveau: goed.
Redactie: correct. Er waren enkele kanttekeningen. De taalkundig correcte opdracht 'Bereken de hoek van de vectoren' is door veel leerlingen verkeerd begrepen. Vaak werd twee maal de hoek berekend van een vector en de x-as. Voor-

gesteld werd om in dit soort gevallen 'de hoek ingesloten door' te gebruiken. Ook de opstelling van onderdeel a schijnt hier en daar leerlingen parten te hebben gespeeld. Deze lazen een punt achter 'Bereken de kentallen van de vectoren' en vatten de rest van de tekst als nieuwe gegevens op.

Vraagstuk 2

Niveau: goed.
Redactie: over het algemeen correct. Sommigen vonden de gebruikte notatie '$x \in [0, 10]$' in dit verband vreemd aandoen voor de kandidaten. Naar veler mening was het beter geweest het gegeven 'Op de ribbe AB . . .' tussen de onderdelen b en c te verwerken.

Vraagstuk 3

Niveau: 25% hoog, 75% goed. Over het algemeen vond men onderdeel c moeilijk. Hier en daar viel de opmerking dat de opgave in zijn geheel wat eenzijdig was.
Redactie: volgens velen lag de oorzaak van het feit dat onderdeel c tot de slechtst gemaakte onderdelen van het examen behoorde vooral in de naar hun mening onduidelijke redactie van dit onderdeel. Er bleken nogal wat leerlingen te zijn geweest die de translatie $\binom{0}{p}$ op de lijn l toepasten in plaats van op de cirkel C. Op enkele bijeenkomsten vroeg men zich af of de vraagstelling niet voor tweeërlei uitleg vatbaar was.

Vraagstuk 4

Niveau: 10% hoog, 90% goed. Over dit vraagstuk liepen de meningen enigszins uiteen. Zo vond men op een bijeenkomst onderdeel c moeilijk, elders vond men dit onderdeel gemakkelijk in verband met het mogen aflezen van coördinaten uit de grafieken van de drie functies. Naast erg veel lof, vooral voor de originaliteit van het vraagstuk, waren er ook enkele kritische geluiden omtrent de redactie.
Redactie: op dit punt liepen de meningen duidelijk uiteen. Veel collega's hebben zich afgevraagd waarom hun leerlingen met deze opgave zoveel moeite hadden. Volgens menigeen was één van de oorzaken de naar hun mening ongebruikelijke vraagvorm. Er zijn leerlingen die een zekere mate van formaliseren niet gewend zijn. Zo vonden deze bij onderdeel a alleen de oplossing 4 door eenvoudigweg proberen. Ze kwamen niet op het idee eerst een vergelijking op te stellen.
Dat onderdeel b tot de slechtst gemaakte onderdelen van het examen behoorde had twee oorzaken: er waren leerlingen die niet begrepen dat het hier om een tweedegraadsongelijkheid ging en er waren er die de ongelijkheid niet konden oplossen.
Op enkele bijeenkomsten vond men de vraagstelling 'Bereken voor elke gevonden x de drie getallen' wat zwaar aangezet, omdat het antwoord 2 niet echt berekend kon worden.

Als in plaats van de grafiek van $x \rightarrow 2$ de grafiek van $x = 2$ getekend was, kostte dat de leerling 1 punt. Hier en daar vroeg men zich af of men dan twee punten bij het laatste gedeelte van dit onderdeel in mindering moest brengen, omdat de kandidaat als gevolg van zijn fout slechts drie mogelijkheden kon vinden in plaats van vijf.

Het gehele werk

Bijna eensluidend was men van oordeel dat het niveau van het werk in zijn geheel goed was. Voor de kwaliteit van het werk was veel waardering.
Omtrent de in het examen verwerkte stof waren hier en daar enkele opmerkingen. Twee keer de cosinusregel toepassen, ook al was er in opgave 1 nog een andere oplossingsmogelijkheid, vond men over het algemeen wat te veel van het goede. Op enkele bijeenkomsten had men graag wat meer over statistiek en functies in het werk willen hebben.
De beschikbare tijd was volgens 75% van de vergaderenden voldoende, volgens 25% hadden de leerlingen weinig of zelfs te weinig tijd. Wegens de moeilijkheidsgraad van onderdeel 3c en ook omdat dit onderdeel vrij bewerkelijk was, hadden sommigen liever opgave 3 als laatste opgave gezien. Er waren leerlingen die bij dit onderdeel bleven 'hangen' en daardoor te weinig tijd overhielden om opgave 4 grondig te verwerken.
Bijzonder tevreden was men over de normering die nog iets meer gedetailleerd was in vergelijking met vorig jaar. Hier en daar had men wat moeite met de waardering van onderdelen als kandidaten geen of een te summiere berekening op papier hadden gezet bij een vraagstelling als 'voor welke x', waarbij het antwoord niet kon worden geraden of afgelezen (b.v. onderdeel 2c).
Tot slot nog enkele verspreide opmerkingen waar niet iedereen het mee eens hoeft te zijn:

- een tekening bij iedere opgave verplicht stellen
- de bijeenkomsten om 14.00 uur laten beginnen
- de gehele correctiepoule van een inspectierayon op één plaats uitnodigen
- verrassingen niet in één vraagstuk stoppen, maar over alle vier vraagstukken verdelen
- leiding voor leraren bij het MAVO die worstelen met het probleem dat de moeilijkheidsgraad van het examen niet overeenstemt met het kunnen van de leerlingen
- minder moeilijke vraagstukken in het examen en meer didactiekartikelen in Euclides.

F. J. Mahieu

Samenvatting van de examenbesprekingen LTO-C/MAVO-3

Op 25 mei 1977 is, evenals vorig jaar, door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een aantal bijeenkomsten belegd ter bespreking van de open vragen voor LTO-C/MAVO-3. Hiertoe waren alle scholen voor LTO aangeschreven. Alle overige wiskundedocenten van het LBO en het MAVO werden uitgenodigd de besprekingen bij te wonen door een aankondiging in de verschillende vakbladen.
De bijeenkomsten zijn bezocht door 149 docenten waarvan 37 leden van de vereniging.
De bijeenkomsten werden gehouden in Amsterdam, Arnhem, Breda, Groningen, Roermond en Rotterdam.
Uit de verslagen blijkt dat men bijeenkomsten als deze op prijs stelt. Men vraagt het aantal plaatsen uit te breiden en ook aandacht te besteden aan de meerkeuze vragen en de open vragen van het LHNO/LEAO en het LLO.
Het doel van de bijeenkomsten was de redactie en het niveau van de open vragen te bespreken en aandacht te besteden aan de voorgeschreven normen.
Wat het werk in zijn totaliteit betreft vindt men in de verslagen de mening dat een meerderheid het niveau van de opgaven juist vindt, de beschikbare tijd voldoende acht mits de omvang van het werk niet toeneemt.
In één van de verslagen staat: 'Wanneer mag de rekenmachine op het examen?'.
Komen we tot de opgaven afzonderlijk.

Opgave 1

De redactie werd op een enkele uitzondering na als goed gekwalificeerd. Het niveau vond men juist. De meesten vonden de normering goed.
Volgens enkelen waren de redactie en de normering van 1 b niet met elkaar in overeenstemming. Men had liever gezien, blijkt uit één verslag, dat opgave 1a gesplitst was in twee opdrachten. Bovendien vond men dat er toegevoegd had moeten worden 'teken l' en m'''.

Opgave 2

Deze is als zeer moeilijk ervaren.

Wat de redactie betreft had men liever gezien dat er in plaats van 'bewijs' gestaan had 'toon door berekening aan'. De meeste verslagen spreken van 'moeilijk'. In twee verslagen werd de redactie als goed beoordeeld.
Het niveau vond men te hoog in de meeste gevallen. In één verslag beoordeelt men het niveau als juist.
Ten aanzien van de normering was men overwegend van mening dat deze goed was.
Toch vindt men bij de opmerkingen over opgave 2 nog dat de normering voor 2a te streng en voor 2c te soepel geweest is. In het laatste geval had men bij aanname van $\angle EMS = 90°$ ten hoogste 7 punten toegekend willen zien voor de onderdelen b en c. Verder werd de opmerking gemaakt dat gonio te veel 'verstopt' zat in de opgave. Waarom werd bij opgave 2a niet gevraagd aan te tonen dat $ME = MS = 5$ in verband met het gevraagde in 2b en 2c?
In het geheel had men opgave 2 liever als laatste vraagstuk gehad.

Opgave 3

De redactie wordt in bijna alle verslagen goed genoemd.
In één verslag had men bij 3a liever gezien: 'Hoe groot is het maximum van $g(x)$?'. Men geeft als reden op dat de leerling niet noodzakelijk tot een berekening hoeft te komen, maar het zo kan aflezen uit het voorschrift.
Het niveau wordt als juist beoordeeld op één uitzondering na, die het als hoog kwalificeert.
De normering werd in alle verslagen op één na goed bevonden. In dat ene verslag spreekt men van 'te soepel'.
Er werden nog enkele opmerkingen gemaakt als: te veel vergelijkingen in één opgave; bij onderdeel b liever enige opklimming in moeilijkheidsgraad; onderdeel d heeft voor leerlingen geen betekenis; waarom d weer ondanks protesten van vorig jaar?.

Opgave 4

De redactie van opgave 4 wordt als moeilijk beoordeeld. Het tweede deel van de opgave na onderdeel b wordt te moeilijk gevonden. Men heeft bezwaar tegen twee vragen in onderdeel c. Men zegt: 'de tekst tussen b en c werkt desintegrerend'. Men had liever gezien dat M' gegeven werd in plaats van A'. Als suggestie voor een betere tekst werd gegeven: 'Teken een cirkel met M als middelpunt die gaat door Q en A.'
Het niveau van deze opgave werd als juist beoordeeld.
De normering werd goed gevonden.

Nog een enkele opmerking van meer algemene aard.
In één verslag staat dat het voor leerlingen van LBO en MAVO-3 nodig is nadrukkelijk te omschrijven wanneer een toelichting vereist is bij een oplossing.

In dat verslag vraagt men naar een brief (van de inspectie) over 'afronden'. Hierbij zij opgemerkt dat er een brief d.d. 07-01-'76 van de centrale commissie LBO no. C.E.C. 76.002 op de scholen voor LTO aanwezig moet zijn waarin richtlijnen aangaande dit onderwerp zijn opgenomen.
Tot slot nog een kreet uit één van de verslagen: 'er wordt niet gereageerd op onze klachten'.
Wie het examen LBO-C/MAVO-3 wiskunde kritisch bekijkt kan zien dat er door de commissie wel degelijk rekening gehouden is met wensen die uit het veld naar voren gebracht zijn. De mate waarin dat gebeurt, misschien gebeuren kan, zal waarschijnlijk steeds een punt van discussie zijn.

F. F. J. Gaillard

De examentoetsen voor het overige LBO-C

Bij de meerkeuzevragen zijn de p-waarde van het item (onderstreept) en de a-waarden van de afleiders vermeld. Tussen haakjes vindt men daaronder de r_{it}-waarde van het item.
De gegevens betreffende het LMO ontbreken, omdat slechts 10 LMO-kandidaten aan het examen deelnamen.
Bij de gemeenschappelijke opgaven zijn ook de p-, a- en r_{it}-waarden voor het LTO opgegeven.

EINDEXAMEN LAGER BEROEPSONDERWIJS 1977 (volgens C-programma)

Donderdag 12 mei, 9.30-11.30 uur

Wiskunde (LHNO, LEAO, LLO en LMO)

1. Bij een translatie is het punt (7, 2) het beeld van het punt (4, 3).
   Deze translatie wordt aangegeven door

	LTO	LEAO	LHNO	LLO
A $\binom{1}{-3}$	4	8	9	5
B $\binom{-3}{1}$	27	35	32	27
C $\binom{-1}{3}$	9	9	10	8
D $\binom{3}{-1}$	60	48	50	60
	(28)	(17)	(24)	(21)

2. Welk van onderstaande getallenparen is een element van $\{(x, y) \mid 2x = 6 - y\}$?

	LTO	LEAO	LHNO	LLO
A $(-4, 2)$	5	8	10	6
B $(4, 2)$	13	22	32	19
C $(-4, -2)$	6	10	12	10
D $(4, -2)$	76	59	46	64
	(36)	(36)	(40)	(43)

3. Gegeven is de functie $f: x \to \frac{1}{2}x - 4$.
$f(-2) =$

A -5	70	64	48	46
B -4	5	8	12	14
C -3	9	15	20	16
D 4	17	13	19	25
	(43)	(37)	(40)	(35)

4. Gegeven is de functie $f: x \to x^2 + x + 1$.
Er geldt

A $f(2) = f(0)$	9	15	18	14
B $f(2) = f(-1)$	16	26	27	31
C $f(2) = f(-2)$	16	23	27	22
D $f(2) = f(-3)$	60	37	28	33
	(51)	(34)	(37)	(34)

5. In een gelijkbenige $\triangle ABC$ is $\angle A = 80°$.
$\angle B$ kan *niet* gelijk zijn aan

A 20°	20	25	21	25
B 40°	37	15	12	23
C 50°	20	22	22	21
D 80°	22	37	45	31
	(39)	(30)	(24)	(32)

6. Gegeven zijn de functies $f: x \to x - 2$ en $g: x \to 2 - x$.
Het snijpunt van de grafieken van f en g is

	LEAO	LHNO	LLO
A $(2, 0)$	62	51	56
B $(0, -2)$	13	18	14
C $(0, 2)$	16	18	19
D $(-2, 0)$	9	13	11
	(41)	(42)	(41)

7. De functie f is gegeven door $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.
$f(x)$ heeft een

		LEAO	LHNO	LLO
A	minimum waarde 0	13	15	14
B	maximum waarde 0	19	17	20
C	maximum waarde +3	34	34	35
D	minimum waarde −3	34	35	31
		(29)	(24)	(23)

8. $x-2$ is *geen* factor van

		LTO			
A	x^2-4x+4	15	29	35	25
B	x^2-4	12	17	17	16
C	$2x-4$	16	16	15	15
D	$-2x-4$	57	38	32	44
		(31)	(26)	(27)	(34)

9. Welke waarde van x voldoet aan de ongelijkheid $-4x-3 < -x-6$?

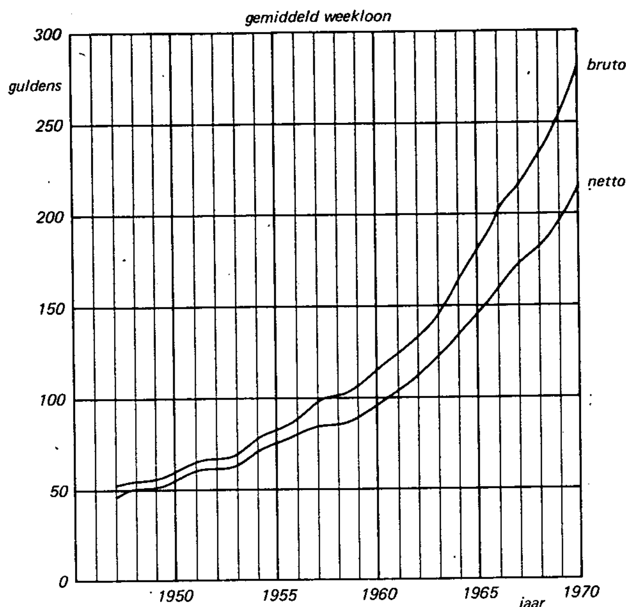
A	−3	15	20	13
B	−1	16	18	13
C	1	28	23	30
D	3	41	38	44
		(41)	(42)	(38)

10. Van de tien waarnemingsgetallen 6, 7, 5, 5, 4, 6, 6, 7, 7, p is de modus gelijk aan de mediaan.
Er geldt

A	$p=4$	7	10	13	14
B	$p=5$	10	11	15	16
C	$p=6$	71	67	61	50
D	$p=7$	12	12	10	20
		(28)	(34)	(33)	(26)

11. Het verschil tussen bruto- en nettoloon is voor de eerste keer *f* 50,— of meer in

A	1968	65	51	68
B	1969	27	35	26
C	1948	5	7	4
D	1947	3	7	2
		(28)	(34)	(32)



12. Bij een verschuiving gaat het punt (2, −3) over in (4, 0).
Bij dezelfde verschuiving gaat het punt (−2, 0) over in

		LEAO	LHNO	LLO
A	(0, −3)	11	15	12
B	(0, 3)	75	61	77
C	(−4, −3)	10	18	7
D	(4, −3)	5	7	5
		(33)	(39)	(31)

13. De grafieken van de functies $f : x \to x^2$ en $g : x \to 2x$

A	vallen samen	14	20	10
B	hebben geen enkel punt gemeen	11	14	10
C	hebben precies één snijpunt	34	36	37
D	hebben precies twee snijpunten	42	30	42
		(41)	(41)	(42)

14. We spiegelen het punt (4, −2) in de grafiek van de functie $f : x \to -x$.
Als beeldpunt krijgen we dan het punt

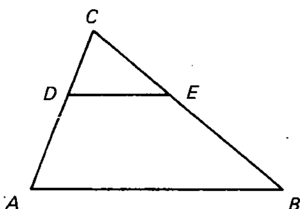
A	(−4, 2)	34	33	33
B	(−4, −2)	32	35	23
C	(−2, −4)	6	9	8
D	(2, −4)	27	24	36
		(39)	(36)	(44)

15. De grafiek van de functie $f: x \to x^2 - 8x + 12$ heeft als top het punt

		LEAO	LHNO	LLO
A	$(4, -4)$	50	38	44
B	$(-4, 4)$	13	18	13
C	$(2, 6)$	23	30	27
D	$(-2, -6)$	13	14	15
		(42)	(39)	(45)

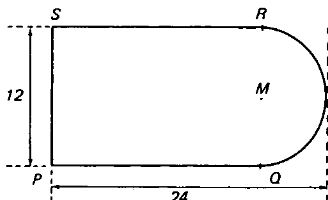
16. Gegeven is $\triangle ABC$.
Op het lijnstuk AC ligt het punt D zo, dat AD en DC zich verhouden als 3 en 2.
Op het lijnstuk BC ligt het punt E zo, dat lijnstuk DE evenwijdig is met lijnstuk AB.
De oppervlakten van $\triangle ABC$ en $\triangle DEC$ verhouden zich als

		LTO			
A	3 en 2	16	25	32	26
B	5 en 2	20	25	26	30
C	9 en 4	46	38	30	30
D	25 en 4	18	11	11	14
		(34)	(14)	(19)	(23)



17. Onderstaande figuur is opgebouwd uit de rechthoek $PQRS$ en de halve cirkel met de middelpunt M en middellijn RQ.
De omtrek van deze figuur is

A	$36 + 12\pi$	14	18	10
B	$48 + 6\pi$	21	19	27
C	$48 + 12\pi$	21	22	17
D	$60 + 6\pi$	44	40	45
		(14)	(20)	(22)

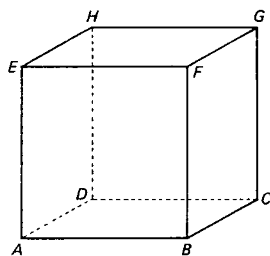


18. Van een ruit hebben de diagonalen de lengte 18 en 24.
De oppervlakte van deze ruit is

	LEAO	LHNO	LLO
A 84	6	10	5
B 108	11	11	8
C 216	56	40	68
D 432	27	39	19
	(34)	(35)	(31)

19. Van een kubus $ABCD.EFGH$ is gegeven $BE = 2$.
De inhoud van deze kubus bedraagt

	LTO			
A 1	8	15	11	9
B $2\sqrt{2}$	48	25	24	32
C 8	15	21	29	16
D $8\sqrt{2}$	28	38	36	42
	(45)	(21)	(24)	(23)



20. Het beeld van het punt $(-1, 1)$ bij spiegeling in het punt $(3, -1)$ is

A $(7, -3)$	62	48	75
B $(7, 1)$	12	11	9
C $(-3, 1)$	17	29	9
D $(-5, 3)$	9	12	6
	(46)	(49)	(41)

21. Gegeven zijn de puntverzamelingen $V = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 6\}$ en $W = \{(x, y) \mid y = 2x + 4\}$.
Het element van $V \cap W$ is een punt van het

A eerste kwadrant	33	34	33	37
B tweede kwadrant	45	39	40	38
C derde kwadrant	10	19	17	17
D vierde kwadrant	10	8	10	8
	(33)	(20)	(11)	(14)

22. (1) Twee vierkanten met gelijke oppervlakten zijn congruent.
(2) Twee rechthoeken met gelijke oppervlakten zijn congruent.

	LTO	LEAO	LHNO	LLO
A (1) en (2) zijn beide waar	19	28	40	21
B (1) is waar en (2) is niet waar	71	57	47	68
C (1) is niet waar en (2) is waar	4	5	5	3
D (1) en (2) zijn beide niet waar	6	10	8	7
	(24)	(29)	(31)	(36)

23. Welke van onderstaande vergelijkingen heeft als oplossingsverzameling de lege verzameling?

	LTO	LEAO	LHNO	LLO
A $x=2$	5	7	18	8
B $x=2x$	16	14	13	15
C $2x=2x$	32	49	55	43
D $2x=2x+2$	46	29	22	34
	(44)	(40)	(30)	(34)

24. $\{x \mid x(x-1)=x(1-x)\}=$

	LTO	LEAO	LHNO	LLO
A ϕ	27	29	32	29
B $\{0\}$	20	27	29	27
C $\{1\}$	20	24	22	21
D $\{0, 1\}$	32	20	18	24
	(41)	(22)	(22)	(35)

25. De verzameling $\{-4, 3\}$ is de oplossingsverzameling van

	LTO	LEAO	LHNO	LLO
A $x^2+7x+12=0$		12	14	9
B $x^2-7x-12=0$		20	21	15
C $x^2+x-12=0$		38	38	37
D $x^2-x-12=0$		29	27	38
		(30)	(27)	(29)

26. De verzameling $A=\{x \in \mathbb{N} \mid 5 < 2x+1 < 7\}$ bevat

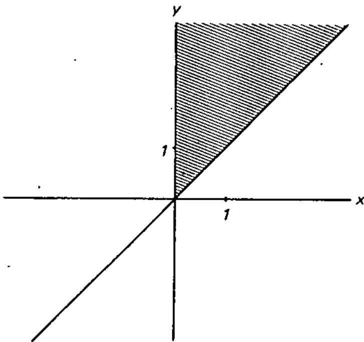
	LTO	LEAO	LHNO	LLO
A geen elementen		49	40	53
B precies één element		23	27	25
C precies twee elementen		17	18	15
D precies drie elementen		11	13	6
		(39)	(36)	(37)

27. $a^2 < 0$ is waar voor

		LTO	LEAO	LHNO	LLO
A	geen enkele waarde van a	87	68	60	74
B	precies één waarde van a	4	10	13	10
C	precies twee waarden van a	2	6	11	5
D	meer dan twee waarden van a	7	16	16	12
		(30)	(33)	(34)	(36)

28. In onderstaand assenstelsel is de grafiek getekend van $x \to x$.
Voor de coördinaten (x, y) van elk punt van het gearceerde vlakdeel geldt

		LTO	LEAO	LHNO	LLO
A	$y \geqq x$ en $x \geqq 0$		50	45	58
B	$y \leqq x$ en $x \geqq 0$		21	23	21
C	$y \geqq x$ en $x \leqq 0$		18	21	14
D	$y \leqq x$ en $x \leqq 0$		10	11	7
			(35)	(34)	(35)



29. De oplossingsverzameling van de vergelijking $-3(x-1) = \dfrac{x-1}{-3}$ is

A	ϕ	31	35	32	29
B	$\{0\}$	12	14	18	13
C	$\{1\}$	31	21	18	26
D	$\mathbb{R}$	25	31	30	32
		(38)	(14)	(15)	(23)

30. Er zijn 15 waarnemingen verricht.
De resultaten staan in onderstaande tabel.

waarnemingsgetal	6	7	8	9	10
frequentie	2	2	2	5	4

De mediaan is

A 7
B 8
C 9
D 10

LEAO	LHNO	LLO
4	6	5
34	34	42
58	50	44
5	9	9
(34)	(39)	(17)

EINDEXAMEN LAGER BEROEPSONDERWIJS 1977 (volgens C-programma)

Dinsdag 17 mei, 9.30-11.30 uur

Wiskunde (LHNO, LEAO, LLO, LMO)

(Open vragen)

OPGAVE 1

In een vogelreservaat werden de eieren van kievit, grutto en scholekster geteld:

jaar	1970	1971	1972	1973	1974
kievit	164	......	92	104	112
grutto	86	92	......	116	104
scholekster	28	20	17	19	21

Verder is over deze jaren gegeven:
het gemiddeld aantal kievitseieren is 113
de modus van de aantallen grutto-eieren is 86

Gevraagd:
a. Bereken het aantal kievitseieren in 1971.
b. Noteer het aantal grutto-eieren in 1972.
c. Noteer de mediaan van de aantallen eieren van de scholekster.
d. Maak een staafdiagram van de gegevens van de scholekster.

OPGAVE 2

Gegeven: De functies f en g gedefinieerd door
$f(x) = 2x + 2$ en $g(x) = -x - 4$.
Het domein van beide functies is $[-5, 2]$.

Gevraagd:
a. Bereken $f(-3)$.
b. Voor welke x geldt: $f(x) = -6$?
c. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f en de x-as.
d. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g en de y-as.
e. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.
f. Teken de grafieken van f en g in één rechthoekig assenstelsel XOY.
g. Voor welke x geldt: $f(x) > g(x)$?

OPGAVE 3

Gegeven: De functies f en g gedefinieerd door
$f(x) = -x^2 + 6x - 5$ en $g(x) = 2x - 5$.
Het domein van beide functies is $[0, 6]$.

Gevraagd:
a. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de x-as.
b. Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f.
c. Voor welke x geldt: $f(x) = 3$?
d. Teken de grafiek van f in een rechthoekig assenstelsel XOY.
e. Teken in ditzelfde assenstelsel de grafiek van g.
f. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.
g. Voor welke x geldt: $f(x) \leqq g(x)$?
h. Noteer het bereik van f en het bereik van g.

OPGAVE 4

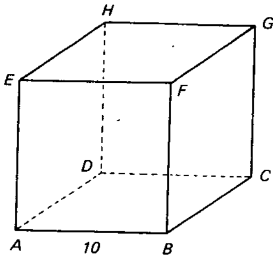
Gegeven: In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven:
$A(-3, -2)$, $B(3, -2)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$.
P is het snijpunt van het lijnstuk AD en de x-as.

Gevraagd:
a. Teken vierhoek $ABCD$.
b. Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCD$.
c. Verschuif vierhoek $ABCD$ zodanig dat het beeld van het punt A samenvalt met de oorsprong.
Het beeld van A, B, C en D is resp. A', B', C' en D'.
Teken vierhoek $A'B'C'D'$.
d. Welke verschuiving heb je in opdracht *c* uitgevoerd?
e. Bereken de oppervlakte van vierhoek $PA'CD$.
f. Bereken de omtrek van driehoek ABD.

OPGAVE 5

Gegeven: De kubus *ABCD.EFGH.*
De ribbe is 10.
Het punt *K* is het midden van het lijnstuk *BF.*
Het punt *L* is het midden van het lijnstuk *CG.*

Gevraagd:
a. Bereken de lengte van lijnstuk *EK.*
b. Bereken de oppervlakte van vierhoek *ABKE.*
c. Bereken de lengte van lijnstuk *HK.*
d. Bereken de inhoud van het lichaam *EFK.HGL.*



De examentoets HAVO

De resultaten van 464 kandidaten, verkregen uit de formulieren die 22 docenten op tijd teruggestuurd hebben, zijn hieronder verwerkt.

EXAMEN HOGER ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

Donderdag 12 mei, 9.30-12.30 uur

Wiskunde

1. In R_2 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY gegeven de punten $A(1, 0)$ en $B(8, 1)$ en de lijn l met vergelijking $y = -3x + 3$.
   a. Stel een vectorvoorstelling op van de lijn k door B evenwijdig aan l.
   b. Op l ligt het van A verschillende punt C zo dat $AB = BC$.
   Bereken de coördinaten van C.
   c. De cirkel met middelpunt A en straal AB snijdt de y-as in de punten D en E.
   Bereken cos $\angle DBE$.

2. Gegeven zijn van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ de functies

$$f : x \to {}^2\log(4 - x^2) \text{ en } g : x \to {}^2\log(2 + x).$$

   a. Bereken het domein van f.
   Bereken het domein van g.
   b. Los op: $f(x) \cdot g(x) = 0$.
   c. Los op: $f(x) + g(x) = 3$.

3. Iemand heeft twee zuivere dobbelstenen.
   De eerste is een gewone dobbelsteen, maar bij de tweede staan op de zes zijvlakken achtereenvolgens 1, 2, 3, 3, 4 en 5 ogen.

Hij werpt met beide dobbelstenen en telt het totaal aantal ogen.
a. Bereken de kans dat bij één worp het totaal aantal ogen even is.
b. Bereken de kans dat bij één worp het totaal aantal ogen kleiner dan 8 is.
c. Bij 100 worpen bedraagt het gemiddelde aantal ogen $6\frac{1}{2}$.
De daarbij behorende frequentietabel is als volgt:

aantal ogen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
frequentie	3	5	12	14	15	18	14	a	b	c

Bewijs dat $a = c + 7$.

4. Met domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f: x \to (2 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)$.
a. Los op: $f(x) = 2$.
b. Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f.
c. Voor welke $p \in \mathbb{R}$ heeft de oplossingsverzameling van de vergelijking $f(x) = p$ precies twee elementen?

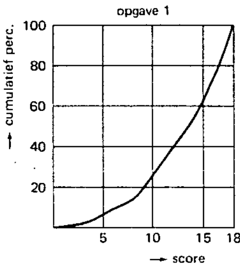
5. In R_3 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $B(4, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 8)$.
Deze punten zijn de hoekpunten van de piramide $D.OABC$.
Het punt P is het midden van de ribbe AD.
Verder is gegeven punt $Q(0, 0, 5)$.
a. Bereken de afstand van P en vlak BCD.
(zie verder op blz. 208)

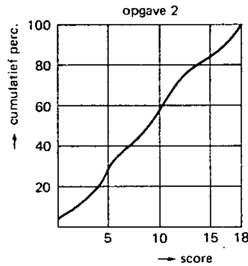
Scoreresultaten HAVO (464 kandidaten)

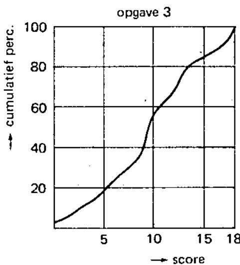
onderdeel	maximaal punten aantal	gemiddelde score	p-waarde	r_{it}
1a	4	3,51	0,88	0,24
1b	7	4,52	0,65	0,56
1c	7	5,07	0,72	0,53
2a	5	3,72	0,74	0,52
2b	6	2,24	0,37	0,45
2c	7	3,32	0,47	0,59
3a	5	3,60	0,72	0,36
3b	5	3,40	0,68	0,29
3c	8	3,04	0,38	0,39
4a	4	3,06	0,77	0,44
4b	10	5,13	0,51	0,72
4c	4	1,24	0,31	0,52
5a	6	4,59	0,77	0,49
5b	6	4,64	0,77	0,52
5c	6	2,45	0,41	0,64

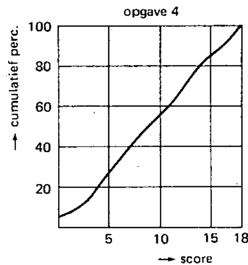
b. Vlak V gaat door P en Q en is evenwijdig aan de lijn CD.
V snijdt de ribbe AB in punt E.
Bereken de coördinaten van E.

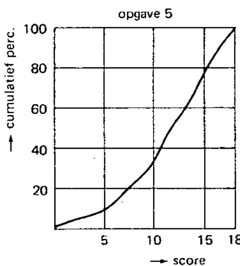
c. Op de ribbe AB ligt een punt F.
De cosinus van de hoek van de lijn OF en de lijn CD is gelijk aan 0,2.
Bereken de coördinaten van F.











Aantal scorepunten in mindering gebracht voor rekenfouten en/of verschrijvingen (464 kandidaten)

aantal \ onderdeel	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	gem.	%
0	444	385	352	434	444	391	444	439	416	422	405	453	367	384	372	410	88
1	17	60	86	24	15	62	17	20	41	38	43	11	65	66	63	42	9
2	3	15	18	6	3	11	2	4	7	4	11	–	27	11	22	10	2
3	–	2	8	–	–	–	1	1	–	–	3	–	2	2	2	1	–
4	–	1	–	–	2	–	–	–	–	–	2	–	2	1	4	1	–
≧ 5	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1	0,2	–

Samenvatting van de examenbespreking HAVO op zaterdag 3 september 1977

De bijeenkomst werd bezocht door 82 personen.
De overgrote meerderheid van de aanwezigen was voorstander van regionaal gespreide bijeenkomsten onmiddellijk na het examen.
Algemeen was men van mening dat het niveau van het examen goed tot gemakkelijk was; niet te gemakkelijk, doch zeker niet te moeilijk. Het werk toetste techniek en vaardigheid en – in mindere mate – ook inzicht.
Het te verwachten niveau voor volgende jaren mag niet afgeleid worden uit één examen, doch uit alle examens van de afgelopen jaren.
Opgaven 3a en 3b werden als zeer gemakkelijk ervaren, terwijl opgave 3c door sommigen zeer op prijs werd gesteld en anderen juist vonden dat hier geen kansrekening maar toepassing van algebra werd getoetst. De bezwaren waren hierbij niet algemeen omdat men bij een vraagstuk over kansberekening ook wel andere dingen mag toetsen en men ook wel vond dat hier een berekening met een reeds gegeven antwoord gevraagd werd.
Bij opgave 4 meent men dat de gegeven functie niet de meest prettige is voor een functie-onderzoek. Leerlingen die zwak zijn in goniometrie hebben weinig kans hun capaciteiten in functie-onderzoek te tonen. Bij een foute aanpak van deel b komt men ook vaak bij deel c niet meer tot een goede oplossing.
Het is nog niet iedere docent bekend dat bij functie-onderzoek ook het tekenoverzicht van $f(x)$ gevraagd wordt, terwijl sommigen ten onrechte menen dat altijd op buigpunten onderzocht moet worden. Men heeft de laatste jaren gevraagd precies op te geven wat bij functie-onderzoek geëist wordt. Nu dit is vastgelegd (zie ook het vademecum) moet men er zich ook aan houden.

De examentoets wiskunde-I VWO

Aan ongeveer 50 docenten is gevraagd medewerking te verlenen aan een onderzoek over de opgaven van het centraal schriftelijk eindexamen wiskunde I VWO door een scoreformulier en een formulier voor het oordeel van de leraren in te vullen.
23 docenten hebben deze formulieren op tijd voor de verwerking teruggezonden. Tevens werd gevraagd aan te geven of de kandidaat wiskunde II, natuur- en/of scheikunde in zijn pakket heeft opgenomen. Door deze gegevens is het mogelijk gebleken drie deelpopulaties van de 545 kandidaten te beschouwen, zoals verderop in dit hoofdstuk besproken wordt.

EXAMEN VOORBEREIDEND WETENSCHAPPELIJK ONDERWIJS IN 1977

Donderdag 12 mei, 9.30-12.30 uur

Wiskunde I

1. De functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is gegeven door $x \to \frac{1}{2}x - 2 + \dfrac{2}{x+1}$.
   a. Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f.
   b. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
   c. Bereken a, b, c en d voor het geval dat de functie g gegeven door
   $g(x) = f(x)$ voor $x \leqq -3$
   $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ voor $-3 < x < 0$
   $g(x) = f(x)$ voor $x \geqq 0$
   een differentieerbare functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is.

2. Een kromme K is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY gegeven door $x = -t \cdot e^t$ en $y = t \cdot e^{-t}$ waarbij $t \in \mathbb{R}$.

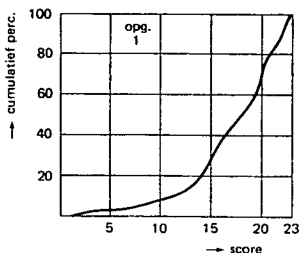
a. Bereken het bereik van de functie $t \to -t \cdot e^t$
en het bereik van de functie $t \to t \cdot e^{-t}$.
b. Bewijs dat de lijn met vergelijking $y = x$ symmetrie-as is van K.
c. Stel van elke asymptoot van K een vergelijking op.
Teken K.

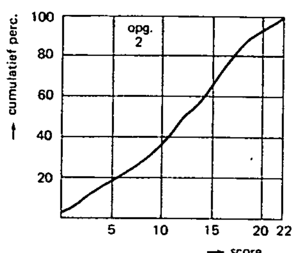
3. Vijf personen A, B, C, D en E beoefenen het schijfschieten.
De trefkans per schot is achtereenvolgens p_A, p_B, p_C, p_D en p_E.
a. Gegeven is dat $p_A = \frac{1}{4}$ en $p_B = \frac{1}{3}$.
A en B lossen ieder twee schoten.
De som van de aantallen treffers van A en B is een stochast X.
Stel de kansverdeling van X op.
b. De kans dat C de schijf mist is tweemaal zo groot als de kans dat D de schijf mist. C lost één schot en D lost twee schoten.
De kans op tenminste één treffer bij deze drie schoten is gelijk aan 0,872.
Bereken p_D.
c. E beweert dat zijn trefkans 0,6 is.
De anderen beweren dat zijn trefkans kleiner is.
E zal 20 schoten lossen om zijn bewering te toetsen tegenover die van de anderen.
Bij hoeveel treffers zal met een betrouwbaarheid van 95% de bewering van E verworpen worden en die van de anderen niet?

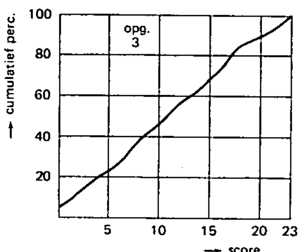
4. Gegeven zijn van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ de functie $f: x \to \ln(x-1)$
en voor elke $p \in \mathbb{R}^+$ de functie $g_p: x \to p(x-1)$.
a. Voor welke p geldt: de grafieken van f en g_p raken elkaar?
b. Los op: $f \circ g_1(x) < g_1 \circ f(x)$.
c. Voor welke p geldt: de grafiek van g_p snijdt de x-as in punt A en de grafiek van f in de punten B en C zo dat B het midden is van het lijnstuk AC?

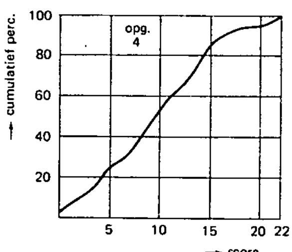
Scoreresultaten wiskunde I VWO (545 kandidaten)

onderdeel	maximaal puntenaantal	gemiddelde score	p-waarde	r_{it}
1a	10	8,25	0,83	0,56
1b	6	4,96	0,83	0,45
1c	7	3,99	0,57	0,65
2a	8	5,15	0,64	0,65
2b	6	1,93	0,32	0,51
2c	8	4,86	0,61	0,64
3a	10	5,71	0,57	0,62
3b	6	1,63	0,27	0,62
3c	7	3,91	0,56	0,51
4a	7	4,92	0,70	0,61
4b	8	3,75	0,47	0,65
4c	7	1,02	0,15	0,55









Op het scoreformulier is gevraagd of de kandidaat wiskunde II en natuur- en/of scheikunde in zijn pakket opgenomen heeft. Hierdoor zijn we in staat geweest 517 kandidaten te verdelen in drie deelpopulaties:

- kandidaten met wiskunde II en natuur- en/of scheikunde in hun pakket (116 kandidaten)
- kandidaten met natuur- en/of scheikunde in hun pakket (268 kandidaten)
- kandidaten met alleen wiskunde I in hun pakket (133 kandidaten).

  (Er waren 2 kandidaten met wiskunde II zonder natuur- en scheikunde in hun pakket en 1 docent met 26 kandidaten heeft deze kolommen niet ingevuld.)

De resultaten zijn weergegeven in onderstaande tabel. De verschillen in resultaten zijn opmerkelijk.

max. aantal punten	90
gem. totale steekproef	50,1
gem. wisk. II + nat./scheikunde	61,4
gem. nat./scheikunde	48,9
gem. alleen wisk. I	41,7

Aantal scorepunten in mindering gebracht voor rekenfouten en/of verschuivingen (545 kandidaten)

onderdeel / aantal	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	gem.	%
0	442	433	333	481	539	504	482	512	482	496	479	529	476	87
1	82	99	139	48	4	27	44	23	40	41	51	11	51	9
2	14	8	51	12	2	10	14	5	12	7	13	5	13	2
3	4	4	17	3	–	2	1	4	3	1	2	–	3	1
4	2	1	3	1	–	2	2	1	8	–	–	–	2	–
≧ 5	1	–	2	–	–	–	2	–	–	–	–	–	0,4	–

Samenvatting van de examenbespreking VWO wiskunde-I op zaterdag 3 september 1977

De bijeenkomst werd bezocht door 100 personen.
De overgrote meerderheid van de aanwezigen was voorstander van regionaal gespreide bijeenkomsten onmiddellijk na het examen.

Ook hier was de totale indruk dat het werk niet al te moeilijk was en veel routine bevatte.
Sommigen vonden opgave 1c minder geschikt omdat niet duidelijk is welke mate van exactheid men moet eisen.
Bij vraagstuk 2c zagen sommigen liever 'onderzoek de kromme en teken *K*', maar hierbij is het probleem dat voor het onderzoek van een kromme geen bindende voorschriften zijn gegeven.
Van vraagstuk 3, waarvoor veel lof was, was de normering van deel c moeilijk doordat er vele mogelijkheden waren om tot een oplossing te komen.
Van vraagstuk 4 vond men a en b redelijk en c een typisch VWO-vraagstuk, dat helaas door tijdgebrek door weinig kandidaten goed gemaakt werd.
Voor volgende jaren ziet men gaarne een examen dat niet zo moeilijk is als het examen 1976, doch zeker niet gemakkelijker dan het examen 1977.

Algemeen
De tekst waarmee vorige jaren het examen begon, n.l. 'Schrijf de uitwerkingen van de onderdelen van de volgende vraagstukken zo op dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn', wil men gaarne volgende jaren weer boven de opgaven geplaatst zien.

Cognitieve vaardigheden in het examen VWO-wiskunde I 1977; een factoranalyse[1])

Drs. S. P. van 't RIET

Inleiding (1)

De samenstelling van een eindexamen kan men van verschillende kanten benaderen. Zo kan men trachten na te gaan in welke mate het examen in een vak representatief is voor het examenprogramma of voor het gegeven onderwijs. Ook kan men onderzoeken, hoe de docenten moeilijkheidsgraad, keuze van onderwerpen, volgorde van vraagstukken en dergelijke beoordelen[2]). Voorts zou men kunnen evalueren, in hoeverre het examen voldoet aan eisen van juiste taalkundige formulering of aan criteria van testtheoretische aard.
Een geheel andere benadering is gekozen voor dit artikel en het onderzoek, dat er aan ten grondslag ligt, namelijk de vraag op welke cognitieve vaardigheden het examen VWO-Wiskunde I een beroep doet. Daartoe is een factoranalyse uitgevoerd op examenresultaten van 93 leerlingen 6 VWO 1976/77 van het Comenius College te Hilversum. Ondanks de psychometrische gebreken, die aan dit beperkte onderzoek kleven, lijken de resultaten ervan wel degelijk enig verhelderend inzicht te geven in de samenstelling van dit examen in het bijzonder en zelfs van het examenprogramma in het algemeen.
Daar veel lezers van Euclides waarschijnlijk niet op de hoogte zijn van de factoranalytische methode, is een korte beschrijving van de voor dit onderzoek gebruikte procedure opgenomen.

Vraagstellingen (2)

In vele studies van schoolprestaties vindt men een duidelijk onderscheid tussen taalkundige en wis- en natuurkundige vaardigheden van leerlingen[3]). Men zou nu de vraag kunnen stellen, in hoeverre een dergelijk onderscheid nog terug te vinden is in de vaardigheden, waarop een zeer homogeen examen als dat in wiskunde een beroep doet. Met name de toevoeging van het onderdeel waarschijnlijkheidsrekening en statistiek aan het examenprogramma VWO-Wiskunde I lijkt deze vraag te rechtvaardigen, gezien de minder formele formulering van de opdrachten in dit onderdeel, met hun in meer alledaags Nederlands gestelde gegevens en probleemstellingen. Het vermoeden rijst dan ook, dat juist deze examenonderdelen een groter beroep doen op taalkundige vaardigheden dan de andere. De eerste vraagstelling is nu dus of hiervan iets terug te vinden is in de examenresultaten van de leerlingen.

Voorts is het de laatste jaren in het onderwijs gebruikelijk geworden met allerlei cognitieve categorieën te werken[4]. Ook in de wiskundedidaktiek is deze werkwijze ingevoerd door Van Dormolen[5]. Dit gebruik van cognitieve categorieën gebeurt meestal erg intuïtief en meer vanuit de subjektieve ervaring van de leraar, dan vanuit een meer objektieve bestudering van het leerlingengedrag. Ongetwijfeld is deze belangstelling voor cognitieve categorieën een positief gevolg van de ontwikkeling, die in het recente verleden in het wiskundeonderwijs heeft plaatsgevonden van routinegericht naar inzichtgericht onderwijs, een ontwikkeling die nog steeds niet is uitgewerkt. Met name dit onderscheid tussen kennis/routine enerzijds en begrip/inzicht/problem-solving anderzijds wordt in de praktijk van het wiskundeonderwijs veel gehanteerd en door de meeste docenten als een bruikbare indeling bij het leren en onderwijzen van wiskunde gezien. Daar het hanteren van dit onderscheid ook bij de opstelling van examens een rol zal spelen, ligt het voor de hand de vraag te stellen of beide leervormen in de examenresultaten van leerlingen zijn terug te vinden. Dit is dan de tweede vraagstelling. Gezien de beperkte aard van het gedane onderzoek leek het niet zinvol een grotere differentiatie van cognitieve vaardigheden in de vraagstelling op te nemen.

Opzet van het onderzoek (3)

Om bovenstaande vraagstellingen te onderzoeken is gebruik gemaakt van de factoranalytische methode, een methode van empirisch-statistisch onderzoek, die om twee redenen bij de vraagstellingen aansluit.
Ten eerste kan men met factoranalyse nagaan, in hoeverre uit de literatuur bekende vaardigheden, die met speciale tests gemeten kunnen worden, in het te onderzoeken testgedrag een rol spelen. Dit sluit aan bij de eerste vraagstelling. Taalkundige vaardigheden zijn in ons onderzoek gemeten met behulp van bepaalde talenonderdelen van het examen. De scores op die onderdelen zijn samen met de scores op de wiskundeonderdelen van het examen in de analyse betrokken, waardoor een beeld ontstaat over de aard van de onderlinge samenhang.
Ten tweede kan men met factoranalyse onderzoeken of het testmateriaal zo is samengesteld, dat men er dat testgedrag mee meet, dat men beoogt te meten. Dit sluit aan bij de tweede vraagstelling. Daar er geen tests voorhanden waren, die de bij het examen beoogde vaardigheden kennis/routine en inzicht/problem-solving zuiver meten, moet hier dus getracht worden door vergelijking van de resultaten van de factoranalyse met de interpretatie van het testmateriaal (de examenonderdelen) tot konklusies te komen.
Daar de onderzoeksmogelijkheden beperkt waren, is de volgende opzet gerealiseerd. Als te onderzoeken examen is gekozen het examen VWO-Wiskunde I van 12 mei 1977, daar de homogeniteit van het examenprogramma een minder gekompliceerde situatie doet vermoeden, dan b.v. verwacht kan worden bij een examen HAVO-Wiskunde, waarvoor het examenprogramma heterogener is. De 12 verschillende onderdelen van dit examen, gescoord volgens de bijbehorende normen, deden dienst als de eerste 12 geobserveerde variabelen en vormden het eigenlijke objekt van onderzoek. In verband met de eerste vraagstelling is voorts gebruik gemaakt van 4 tot het eindexamen behorende talenonderdelen (variabelen

13 t/m 16) en van de 3 gehouden schoolonderzoeken Wiskunde I (variabelen 17, 18 en 19). Op deze wijze was de kans het grootst om tot tenminste een taal- zowel als een wiskundefactor te komen, zodat de sommen van het wiskunde-examen in ieder geval op twee factoren vergeleken konden worden. Voor alle vier de talen-onderdelen moest een tekst worden gelezen, waarna met begrip van die tekst een opdracht moest worden uitgevoerd, een situatie overeenkomstig die van het wiskunde-examen. In aanmerking kwamen van elk van de vakken Nederlands en Engels een schoolonderzoek en een onderdeel van het centraal schriftelijk. Voor de SO-cijfers is voor alle leerlingen genomen het oorspronkelijk behaalde cijfer. De hertentamenregeling was aan veel beperkingen onderhevig en slechts na afloop van alle SO'n van toepassing op een beperkt aantal leerlingen. De slechts twee leerlingen, die wel wiskunde, maar geen Engels in hun pakket hadden, zijn uit het onderzoek weggelaten. Alle leerlingen zijn in alle vakken aan dezelfde SO'n onderworpen, die volgens tevoren opgestelde normen zijn nagekeken. De SO'n wiskunde omvatten resp. de volgende onderdelen: 1. Goniometrie en funktie-onderzoek; 2. Integraalrekening en krommen; 3. Differentiaalvergelijkingen en mathematische statistiek. Alle leerlingen hebben gedurende twee jaar de hele examenstof gedoceerd gekregen in vier verschillende groepen, elk met een eigen docent. De gebruikte methode was Moderne Wiskunde[6]).
Nadat alle gegevens verzameld waren, is onder auspiciën van Dr. A. Dirkzwager een factoranalyse uitgevoerd op de SARA-computer van de Vrije Universiteit te Amsterdam.

Factoranalyse (4)

Factoranalyse is een statistische methode om een groot aantal geobserveerde variabelen te herleiden tot een kleiner aantal hypothetische variabelen, waardoor een duidelijker beeld ontstaat van de onderlinge samenhang van deze geobserveerde variabelen. Daar de geobserveerde variabelen in het algemeen niet statistisch onafhankelijk zijn, heeft elk een gedeelte van zijn variantie gemeen met een aantal van de andere. Deze gemeenschappelijke variantie maakt het mogelijk op zoek te gaan naar hypothetische variabelen, die voor de gemeenschappelijke variantie verantwoordelijk gesteld kunnen worden. Deze hypothetische variabelen noemen we factoren. De geobserveerde variabelen worden nu verondersteld een lineaire combinatie te vormen van de factoren. Een factoranalyse levert dan voor elke geobserveerde variabele en elke factor een coëfficiënt of factorlading op, die bepalend is voor de mate, waarin de betreffende factor bijdraagt aan de variantie van de betreffende geobserveerde variabele. Deze coëfficiënten, verzameld in de z.g. factorpatroonmatrix, maken het nu mogelijk de geobserveerde variabelen te interpreteren in termen van de factoren. Hierbij worden meestal alleen die factoren betrokken, die de grootste hoeveelheid variantie verklaren en nog zinvol in het kader van een bepaalde theorie passen.
Er bestaan verschillende procedures om factoren te extraheren. In dit onderzoek is gebruik gemaakt van de principal components analysis (PCA). Nadat men de geobserveerde variabelen gestandaardiseerd heeft, bepaalt men onder bepaalde randvoorwaarden die lineaire combinatie van de geobserveerde variabelen, die

de meeste variantie verklaart. Door deze lineaire combinatie als nieuwe variabele op te vatten en te standaardiseren vindt men de eerste factor. Trekt men nu de bijdrage van deze eerste factor van de geobserveerde variabelen af en herhaalt men bovenstaande procedure op de aldus verkregen residuele variabelen, dan vindt men de tweede factor, enz. Een PCA heeft twee voordelen. Ten eerste treedt er vanaf het begin een maximale ophoping van variantie op in de eerste factoren. Ten tweede verkrijgt men orthogonale factoren, d.w.z. factoren die statistisch onafhankelijk zijn, daar een volgende factor slechts variantie verklaart, die niet door de vorige factoren verklaard wordt. Een nadeel van de PCA is, dat alle geobserveerde variabelen in het algemeen hoog scoren op de eerste factor, die daardoor een erg algemeen karakter krijgt en dan vaak weinig tussen de geobserveerde variabelen discrimineert. Dit bezwaar kan men ondervangen door na afloop van de PCA een rotatie uit te voeren op een aantal factoren. Hierbij wordt, met behoud van dezelfde hoeveelheid verklaarde variantie, het lineaire verband tussen de geobserveerde variabelen en de factoren gewijzigd. In dit onderzoek is dit gebeurd met de varimax-methode. Deze handhaaft de orthogonaliteit van de factoren en zorgt ervoor, dat elke factor slechts bijdraagt aan de variantie van een minimaal aantal geobserveerde variabelen. M.a.w. na een varimax-rotatie kan elke factor geïnterpreteerd worden met behulp van een klein aantal geobserveerde variabelen.

Naast PCA en varimax-rotatie zijn er verschillende andere procedures voor factorextraktie en rotatie. Het werken met factoranalyse kent daarom een aantal beslissingsmomenten, die van invloed zijn op de uitkomst van de analyse. Bovendien moeten de aan het licht gebrachte verbanden na afloop geïnterpreteerd worden in het kader van bestaande of nog te ontwikkelen theorieën. Ook deze interpretaties kunnen vaak zeer uiteenlopend zijn[7]. Samenvattend kan gesteld worden, dat factoranalyse geen panacee tot de waarheid is, maar een van de vele nuttige statistische hulpmiddelen, die ons in staat stellen ons inzicht in bepaalde verbanden in de werkelijkheid te vergroten. Voor een gedetailleerder behandeling van factoranalyse zie men b.v. Mulaik[8].

Resultaten en interpretatie (5)

Eerst is van alle 19 variabelen het gemiddelde en de standaarddeviatie berekend. In tabel 1 is hiervan een overzicht gegeven. Vervolgens is een PCA gemaakt, die al direkt voor de eerste twee factoren een interessant resultaat opleverde. De factorladingen op deze factoren $F1$ en $F2$ ziet men eveneens in tabel 1. In figuur 1 is een afbeelding van de 19 variabelen gemaakt in het vlak van $F1$ en $F2$. Duidelijk is het onderscheid te zien tussen een wiskundefactor $F1$ en een taalfactor $F2$. Voorts valt op, dat de examensom 3 (var. 7, 8 en 9) over mathematische statistiek (*MS*) zich t.o.v. de andere sommen uitzonderlijk gedraagt en tamelijk sterk de kant van de taalfactor uittrekt. Kennelijk wordt bij het oplossen van deze *MS*-som veel geëist van de taalkundige vaardigheden van de leerlingen, hetgeen begrijpelijk is als men de teksten van de vier examensommen vergelijkt. De tekst van som 3 is de langste en maakt het minst gebruik van wiskundige symbolen en notaties. Vertaling van het alledaagse probleem in een wiskundig probleem is het eerste, dat van de leerling geëist wordt bij het oplossen van deze som.

var.	examen-onderdeel	gemiddelde	stand. dev.	F_1	F_2	$\mathbb{F}_1$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_3$
1	som 1a	8,16	1,98	.69	−.02	.35	.61	.07
2	som 1b	4,75	1,61	.47	.05	−.05	.71	.01
3	som 1c	4,11	2,45	.59	−.12	.31	.55	−.04
4	som 2a	3,96	2,81	.64	.05	.36	.51	.16
5	som 2b	2,14	2,38	.54	−.16	.61	.17	.02
6	som 2c	4,69	2,72	.65	−.17	.35	.60	−.09
7	som 3a	4,77	4,38	.49	.23	.51	.09	.40
8	som 3b	1,02	1,78	.51	.19	.22	.43	.26
9	som 3c	3,80	2,33	.32	.49	−.17	.49	.45
10	som 4a	5,11	2,28	.48	−.20	.62	.09	−.01
11	som 4b	4,03	2,96	.62	−.17	.57	.34	.00
12	som 4c	1,10	1,99	.53	−.27	.70	.10	−.06
13	SO NE	66,46	17,01	−.03	.63	.13	−.35	.70
14	CS NE	62,94	10,15	.04	.66	−.29	.17	.59
15	SO EN	52,62	11,44	.39	.66	.03	.32	.69
16	CS EN	64,81	13,57	.21	.60	.14	−.02	.68
17	1e SO W	59,33	15,50	.80	−.22	.61	.56	−.05
18	2e SO W	69,71	15,39	.79	.00	.45	.65	.13
19	3e SO W	75,31	14,55	.81	−.03	.62	.50	.15

Tabel 1. *De getallen zijn afgerond op twee decimalen*

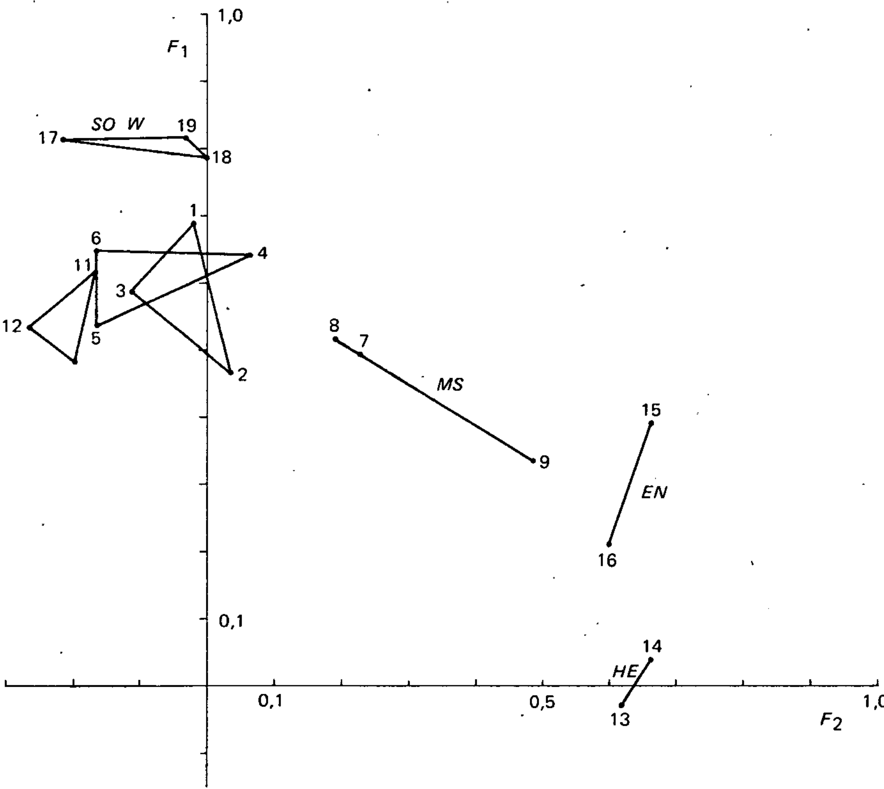


Fig. 1

Na de PCA is een varimax-rotatie uitgevoerd op de eerste drie factoren. De nieuwe factoren 𝔽1, 𝔽2 en 𝔽3 profileerden het zojuist gevonden beeld nog meer. De nieuwe factor 𝔽3 is een sterkere taalfactor, waarop de *MS*-som een hogere lading heeft. De ladingen in tabel 1 doen bovendien 𝔽1 en 𝔽2 kennen als twee nieuwe wiskundefactoren. In figuur 2 zijn de 19 variabelen geprojekteerd in het vlak van 𝔽1 en 𝔽2. De interpretatie van deze twee factoren is moeilijker dan die van 𝔽3, omdat er geen referentievariabelen zijn, die als min of meer factorzuiver beschouwd kunnen worden. Men kan echter aan de hand van de volgende vragen tot een interpretatie komen: 1. Waarom ligt som 4 (var. 10, 11 en 12) dichter bij 𝔽1 en som 1 (var. 1, 2 en 3) dichter bij 𝔽2? 2. Waarom heeft som 4b (var. 11) een hogere lading op 𝔽2 dan som 4a en 4c (var. 10 en 12); waarom heeft som 2b (var. 5) een hogere lading op 𝔽1 en een lagere lading op 𝔽2 dan som 2a en 2c (var. 4 en 6); waarom heeft som 1b (var. 2) een lagere lading op 𝔽1 dan som 1a en 1c (var. 1 en 3)? Ten aanzien van vraag 1 valt op grond van kennis van het gegeven onderwijs en het gegeven examen op, dat som 1 van een type is, dat meer geoefend is en waarvan de oplossing aan duidelijk omschreven regels moet voldoen. Som 4 is echter van een type, dat veel minder geoefend is en een opener, problematischer karakter heeft. Het ligt in eerste instantie dus voor de hand 𝔽2 te identificeren met begrippen als routine, kennis, oefening en 𝔽1 met begrippen als inzicht, begrip, problem-solving. Dit beeld wordt bevestigd, als men de subsommen vergelijkt aan

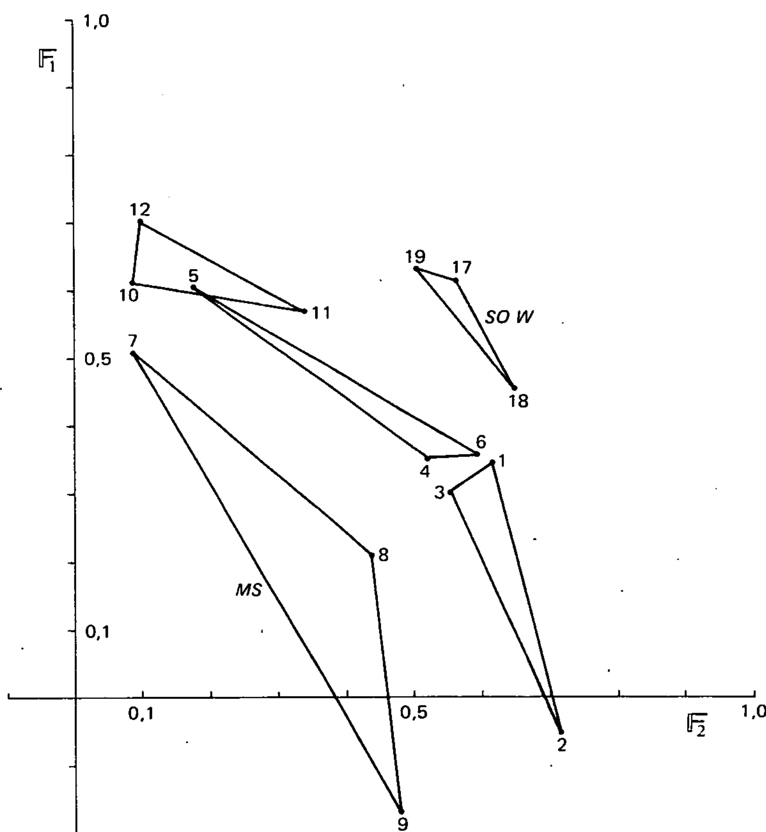


Fig. 2

de hand van vraag 2. De parameterberekening van som 4a en 4c (var. 10 en 12) hebben een meer probleemoplossingskarakter dan de vergelijking van som 4b (var. 11), die een beroep doet op routinehandelingen. Om het juiste bewijs bij som 2b (var. 5) te leveren moet de leerling over veel inzicht beschikken in de logische relaties, terwijl som 2a en 2c (var. 4 en 6) veel meer een beroep doen op routine en kennis. De eenvoudige oppervlakteberekening in som 1b (var. 2) is vrijwel volledig zonder inzicht uit te voeren, terwijl som 1a en 1c (var. 1 en 3) een sterk beroep doen op kennis en routine, maar door de omvang der gegevens inzicht of begrip waarschijnlijk niet geheel kunnen missen. Dit alles rechtvaardigt de veronderstelling, dat we te doen hebben met twee wiskundefactoren, die omschreven kunnen worden als een kennis/routinefactor (F2) en een inzicht/problemsolvingfactor (F1).
Deze interpretatie heeft voor som 3 *MS* (var. 7, 8 en 9) interessante konsekwenties. De toetsing van som 3c (var. 9) bevat voor de leerling kennelijk twee cognitieve stappen, n.l. vertaling van een alledaags probleem in een wiskundig probleem (hoge score op F3), waarna de oplossing geheel een routinezaak is (lage score op F1, hoge score op F2). Met de berekening van de kansverdeling in som 3a (var. 7) is naast een vertaalprobleem (hoge score op F3) een meer inzichtelijk wiskundig vraagstuk gemoeid (hoge score op F1, lage score op F2). De kansvergelijking in som 3b (var. 8) scoort op alle drie factoren enigszins. In hoeverre dit kenmerken van de opdrachten zelf, of van het gegeven onderwijs, dan wel van een kombinatie van die twee zijn, is niet duidelijk. In tabel 2 is bovenstaande nog eens schematisch bijeengebracht.

examenonderdeel		inzicht/problem-solving	kennis/routine	taal
som	omschrijving			
1a	functieonderzoek	+	+ +	
1b	oppervlakteberekening		+ +	
1c	differentieerbaarheid	+	+ +	
2a	krommeonderzoek	+	+ +	
2b	symmetriebewijs	+ +		
2c	asymptoten + grafiek	+	+ +	
3a	kansverdeling	+ +		+
3b	kansvergelijking	+	+	+
3c	hypothesetoetsing		+	+
4a	parameterberekening	+ +		
4b	ongelijkheid	+ +	+	
4c	parameterberekening	+ +		

Tabel 2. + *is een factorlading groter dan* .20 *en kleiner dan* .50.
+ + *is een factorlading groter dan* .50.

Een varimax-rotatie op de eerste vier factoren was waarschijnlijk door het ontbreken van andere referentievariabelen dan talentests niet meer zinvol te interpreteren. Al met al leidt het bovenstaande ons tot enkele algemene konklusies.

Konklusies (6)

1. Ten aanzien van de eerste vraagstelling levert het onderzoek de sterke indika-

tie op dat taalkundige vaardigheden een belangrijke rol kunnen spelen in het wiskundeonderwijs en bij de toetsing van de resultaten van dat onderwijs. Dit effekt is echter vooral te danken aan de *MS*, het enige onderdeel toegepaste wiskunde op het examenprogramma. Pleidooien als van Freudenthal[9]) en het bestuur van de Vereniging van Wiskundeleraren[10]) voor een aan de realiteit georiënteerde, toepasbare wiskunde in het onderwijs krijgen hierdoor een extra dimensie. Als men ervan uitgaat, dat met name A-leerlingen van de taalkomponent in dergelijke vormen van wiskundeonderwijs kunnen profiteren, is een uitbreiding van de mogelijkheden in deze richting een middel om het wiskundeonderwijs voor een grotere groep leerlingen toegankelijk te maken zonder dat de relevantie van dat onderwijs daaronder hoeft te lijden. De plannen van de Subcommissie Bovenbouw van de CMLW om tot de vakken wiskunde A en B te komen[11]), vinden in deze overwegingen zeker steun.

2. Een tweede punt ten aanzien van de rol der taalkundige vaardigheden in het wiskundeonderwijs is de vraag, hoe men voor de betreffende onderwerpen naast kennis/routine en inzicht/problem-solving juist ook deze taalkomponent in het onderwijsleerproces tot zijn recht kan laten komen. Voor toegepaste vormen van wiskunde zal de wiskundedidaktiek er dus een onderwerp bij moeten krijgen. Hoe kan men de leerlingen de geëigende taalkundige vaardigheden bij brengen?

3. Wat betreft de tweede vraagstelling lijkt het vinden van twee wiskundefactoren, kennis/routine en inzicht/problem-solving, niet direkt spectaculair. Toch wordt hierdoor o.i. met meer objektieve middelen een basis gelegd voor het gebruik van cognitieve categorieën in het wiskundeonderwijs. Het onderzoek is een demonstratie van de wijze waarop men zinvol research kan doen naar onderwijsresultaten in de wiskunde en de wijze waarop die tot stand komen. In vervolgonderzoek zou men meer systematisch het werken met cognitieve categorieën kunnen evalueren en verbeteren. Een veelheid van vraagstellingen doemt hier op. Zijn kennis/routine en inzicht/problem-solving de enige cognitieve vaardigheden, die met factoranalyse in wiskundig leerlingengedrag gevonden kunnen worden? Of is met een uitgebreidere onderzoeksopzet, b.v. door gebruik van meer referentievariabelen, aan te tonen, dat beide categorieën verzamelingen van subvaardigheden zijn? Welk verband bestaat er tussen wiskundige vaardigheden en intelligentiefactoren van individuele leerlingen? Welk verband is er tussen de wijze, waarop de leerling heeft les gehad en zijn score op de verschillende factoren? Zijn cognitieve factoren geschikt voor prediktieve doeleinden? Enz.

4. Tenslotte nog een opmerking over het examen als zodanig. Het evenwicht tussen training en inzicht, dat met de vernieuwing van het wiskundeonderwijs is nagestreefd, wordt door het onderzoek in dit examen zeer goed teruggevonden. Uit het oogpunt van de gevonden cognitieve vaardigheden lijkt het een evenwichtig examen. Wel schept de taalfactor in de *MS* o.i. verplichtingen t.a.v. de toekomst: Om de examens vergelijkbaar te houden, zal dit onderwerp op volgende examens op overeenkomstige wijze getoetst moeten worden.

Slotopmerkingen (7)

1. Methodologisch is er op het onderzoek nogal wat aan te merken. Bij de kon-

struktie van de meeste tests is geen of weinig rekening gehouden met testtheoretische eisen. De normeringen voor de beoordeling waren niet al te gedetailleerd. Het werk is door verschillende docenten gekorrigeerd. Voor de examenonderdelen wiskunde (var. 1 t/m 12) is het cijfer van de eerste korrektie genomen. De tests zijn afgenomen op verschillende data en onder verschillende omstandigheden. Dit alles doet twijfelen aan de betrouwbaarheid van de testscores. Desondanks zijn de percentages door de eerste drie factoren beschreven variantie zowel in totaal (49,8%), als per variabele (de kommunaliteiten varieerden van .30 tot .70 met een mediaan van .47) tamelijk hoog. De uitkomsten maken dan ook een konsistente indruk: De talenonderdelen gedragen zich zeer homogeen, evenals de wiskundeonderdelen; ook de MS-som vertoont in zijn geheel een afwijkend gedrag. Het beeld van $\mathbb{F}1$, $\mathbb{F}2$ en $\mathbb{F}3$ tenslotte heeft veel overeenkomst met dat van $F1$ en $F2$.

2. Een gebrek aan referentievariabelen maakt de interpretatie van de factoren onzeker. Toekomstig onderzoek zal op dit punt beter moeten worden opgezet, waardoor het wellicht tevens mogelijk wordt meer factoren in de interpretatie te betrekken.

3. Ook ten aanzien van de generaliseerbaarheid is voorzichtigheid geboden. Vooralsnog mag het gegeven onderwijs representatief geacht worden voor het grootste gedeelte van het VWO-Wiskunde I-onderwijs in Nederland. Onderzocht is dit echter niet. Gemeld zij nog, dat het percentage A-leerlingen in de onderzochte groep 30% bedroeg.

[1]) Met dank aan Dr. A. Dirkzwager voor zijn waardevolle adviezen bij het schrijven van dit artikel.

[2]) Zie b.v.: Het centraal schriftelijk examen VWO-Wiskunde I van mei 1976, Euclides 52, 1976/1977, p. 241–248.

[3]) Zie b.v.: A. Dirkzwager, Intelligentie en schoolprestaties, Swets en Zeitlinger, 1966.

[4]) Zie b.v.: B. S. Bloom e.a., Taxonomie van een aantal in het onderwijs en de vorming gestelde doelen; I. Het cognitieve gebied, Universitaire Pers, Rotterdam, 1971.

[5]) J. van Dormolen, Didactiek van de wiskunde, Oosthoek, 1974.

[6]) G. Krooshof e.a., Moderne Wiskunde Deel 9 VWO, Wolters-Noordhoff, 1972.
Auteursgroep Jagt, Mathematische statistiek, Experimentele uitgave, Deel 1 en 2, Wolters-Noordhoff, 1974.

[7]) Zie b.v. de discussie over Thurstones perceptiefactoren in: P. J. Hettema, Stijlkenmerken in de waarneming, Hoofdstuk 3, Swets en Zeitlinger, 1966.

[8]) S. A. Mulaik, The foundations of factor analysis, Mc-Graw-Hill, 1972.

[9]) Prof. Dr. H. Freudenthal, Waarschijnlijkheid en statistiek op school, Euclides 49, 1973/1974, p. 246.

[10]) Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Wat hebben zes jaar vernieuwing ons gebracht?, Euclides 51, 1975/1976, p. 11–16.

[11]) J. van Lint, Rapportage vanuit de subcommissie bovenbouw van de C.M.L.W., Euclides 50, 1974/1975, p. 385–387.

De examentoets wiskunde-II VWO

De gegevens die hierna vermeld zijn, zijn gebaseerd op een steekproef van 221 kandidaten. De ingevulde formulieren van 22 docenten hebben we op tijd teruggontvangen.

EXAMEN VOORBEREIDEND WETENSCHAPPELIJK ONDERWIJS IN 1977

Dinsdag 17 mei, 9.30-12.30 uur

Wiskunde II

1. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis met oorsprong O gegeven de punten A, B en C waarbij $\vec{OA} = \bar{a}$, $\vec{OB} = \bar{b}$ en $\vec{OC} = \bar{c}$.
   De vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ zijn onafhankelijk.
   De lijn l gaat door A en B, het vlak V gaat door O, A en B.
   a. Neem $A(0, 2, -1)$, $B(1, 0, 1)$ en $C(6, -4, -1)$.
   Bereken de afstand van C en l.
   Op l ligt punt D zo, dat $\angle(CD, l) + \angle(CD, V) = 90°$.
   Bereken de coördinaten van D.
   b. Een lineaire afbeelding F van R_3 naar R_3 beeldt de punten A, B en C op C af.
   Bewijs dat het F-beeld van V een lijn is.
   Geef de beeldruimte (het bereik) van F.
   Geef de kern van F.

2. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $A(3, -1, 1)$, $B(5, -3, 1)$ en $C(3, 3, 5)$ en het vlak V: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$.
   De lijn l gaat door de punten A en B.

De lijn m is de lijn door punt C met richtingsvector $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat er door het punt $P(0, 1, -1)$ geen lijn mogelijk is die zowel l als m snijdt.

b. De bol β gaat door A en B en raakt lijn m in C.
Stel een vergelijking van β op.

c. Het vlak W bevat de lijn l en snijdt vlak V volgens een lijn die loodrecht op m staat.
Stel een vergelijking op van W.

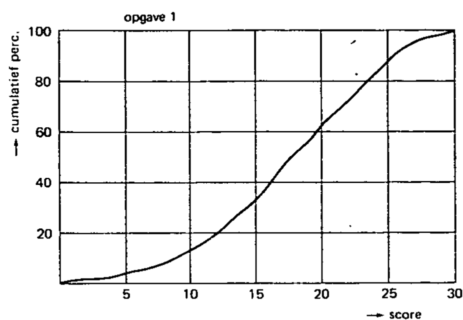
3. *a.* Ten opzichte van een orthonormale basis is A een lineaire afbeelding van R_2 naar R_2 waarbij het punt (2, 3) een dekpunt is en $A(1, 1) = (0, 2)$.
Stel de matrix van A op.

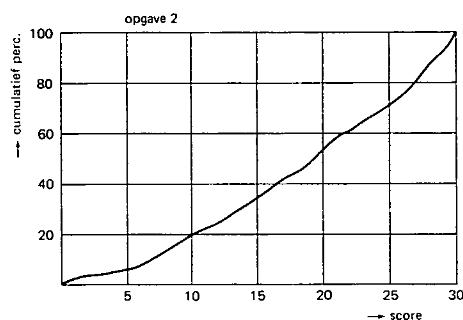
b. Ten opzichte van een orthonormale basis is de afbeelding B van R_2 naar R_2 een rotatie om een punt van de x_1-as over een positieve hoek φ.
Gegeven is dat $B(1, 1) = (0, 2)$.
Bereken cos φ en stel de afbeeldingsvergelijkingen van B op.

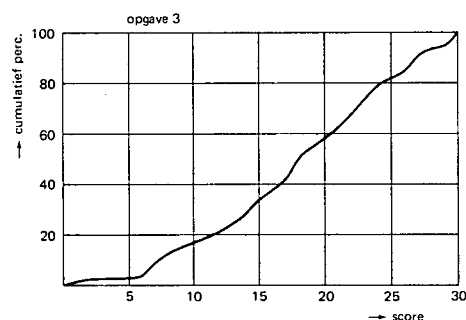
c. Ten opzichte van een orthonormale basis is de afbeelding C van R_2 naar R_2 een isometrie.
Voor de translatie T en de orthogonale afbeelding D geldt $C = T \circ D$ waarbij $C(1, 1) = (0, 2$ en $C(-3, 1) = (0, -2)$.
Stel de matrix van D op en geef de translatievector $\bar{t}$ van T.

Scoreresultaten wiskunde II VWO (221 kandidaten)

onderdeel	maximaal punten-aantal	gemiddelde score	p-waarde	r_{it}
1a	18	12,41	0,69	0,71
1b	12	5,51	0,46	0,65
2a	10	6,31	0,63	0,57
2b	10	6,68	0,67	0,65
2c	10	5,93	0,59	0,65
3a	7	6,59	0,94	0,30
3b	12	5,61	0,47	0,67
3c	11	6,24	0,57	0,62







Aantal scorepunten in mindering gebracht voor rekenfouten en/of verschrijvingen (221 kandidaten)

onderdeel / aantal	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	gem.	%
0	154	172	185	147	177	200	202	195	179	81
1	38	18	22	43	31	18	10	15	24	11
2	17	18	10	18	7	3	7	9	11	5
3	11	7	2	10	5	–	2	2	5	2
4	1	4	2	2	1	–	–	–	1	1
≧ 5	–	2	–	1	–	–	–	–	0,4	–

Samenvatting van de examenbespreking VWO wiskunde-II op zaterdag 3 september 1977

Voor wiskunde II stelt men een duidelijker visie over de verhouding tussen stereometrie en lineaire algebra in het examen op prijs. Van deze visie is in de leerboeken nog weinig te vinden.
Docenten en examenopstellers moeten beseffen dat leerlingen – vanuit hun achtergrond – meer algebraïsch werken dan docenten, die zich jarenlang met de stereometrie hebben bezig gehouden.
Het werk vond men gemakkelijker dan in 1976.
In vraagstuk 1b hebben zeer veel leerlingen ten onrechte gebruik gemaakt van de gegevens uit 1a.
In het eerste vraagstuk ziet men graag, ook de komende jaren, iets waaraan de leerlingen kunnen rekenen.
Ofschoon men tevreden is over de fijne normering, heeft men behoefte aan meer aanwijzingen omtrent veel voorkomende fouten.

De examenopgaven voor de tweede periode

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

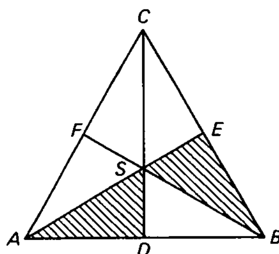
MAVO-4

Maandag 22 augustus, 9.30-11.30 uur

Wiskunde I

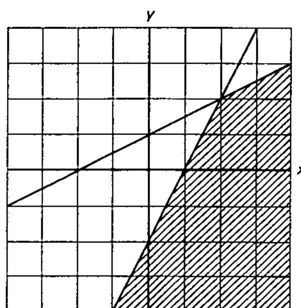
1. Bij een translatie is het punt (2, 1) het origineel van het punt (0, 4).
   Deze translatie kan worden voorgesteld door
   A $\binom{-2}{3}$
   B $\binom{2}{-3}$
   C $\binom{-3}{2}$
   D $\binom{3}{-2}$

2. Onderstaande gelijkzijdige driehoek ABC is in 6 congruente driehoeken verdeeld.
   $\triangle$ ADS is het beeld van $\triangle$ BES bij een rotatie om S over
   A $-120°$
   B $-\ 60°$
   C $60°$
   D $120°$



3. Een leraar geeft 15 leerlingen een proefwerk. De behaalde cijfers zijn
9 5 3 10 8 4 3 6 5 8 3 3 10 9 4
De modus van deze getallen is
A 3
B 4
C 5
D 6

4. In onderstaande figuur zijn de grafieken van $2y-x=2$ en $2x-y=2$ getekend. Voor de coördinaten x en y van de punten (x, y) van het gearceerde vlakdeel geldt
A $2y-x \geqq 2 \wedge 2x-y \geqq 2$
B $2y-x \geqq 2 \wedge 2x-y \leqq 2$
C $2y-x \leqq 2 \wedge 2x-y \geqq 2$
D $2y-x \leqq 2 \wedge 2x-y \leqq 2$



5. Van $\triangle ABC$ is $\angle A=70°$, $\angle B=50°$ en $\angle C=\gamma$.
Er geldt
A $0 < \sin\gamma \leqq 0{,}25$
B $0{,}25 < \sin\gamma \leqq 0{,}5$
C $0{,}5 < \sin\gamma \leqq 0{,}75$
D $0{,}75 < \sin\gamma \leqq 1$

6. Als $k\binom{x}{y} = \binom{3}{-4} - \binom{2}{-1}$, dan kan $\binom{x}{y}$ zijn de vector
A $\binom{1}{-6}$
B $\binom{-2}{6}$
C $\binom{1}{-5}$
D $\binom{2}{-5}$

7. $-2 \in$
A $\{x \mid -x^2 \geqq 2x \wedge -x^2 \geqq -2x\}$
B $\{x \mid -x^2 \geqq 2x \wedge -x^2 < -2x\}$
C $\{x \mid -x^2 < 2x \wedge -x^2 \geqq -2x\}$
D $\{x \mid -x^2 < 2x \wedge -x^2 < -2x\}$

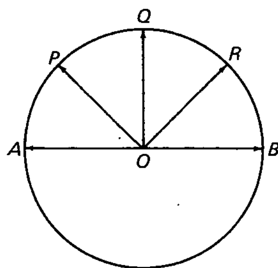
8. Het beeld van de lijn $y = 2x + 2$ bij de translatie $\binom{2}{-1}$ is de lijn
A $y=2x-3$
B $y=2x-1$
C $y=2x+2$
D $y=2x+6$

9. In onderstaande cirkel (O, OA) is $\angle AOP = \angle POQ = \angle QOR = \angle ROB$.

(1) $\vec{OA} + \vec{OP} + \vec{OR} + \vec{OB} = \vec{OQ}$.

(2) $\vec{OB} + \vec{OP} = \vec{OR} + \vec{OQ}$.

A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



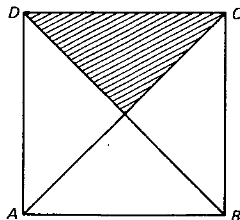
10. De grafiek van $x \to x - px - p$ gaat door het punt $(1, 0)$.
Voor p geldt
A $p = 1$
B $p = \frac{1}{2}$
C $p = -\frac{1}{2}$
D $p = -1$

11. In $\triangle ABC$ is $\angle A = 120°$, $AB = c$, $BC = a$ en $CA = b$.
Uit de cosinusregel volgt
A $a^2 = b^2 + c^2 - bc$
B $a^2 = b^2 + c^2 + bc$
C $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$
D $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$

12. $-x^2 + 4x - 3 =$
A $(-x - 2)^2 + 1$
B $(-x + 2)^2 - 1$
C $-(x - 2)^2 + 1$
D $-(x + 2)^2 - 1$

13. $(p, 2) \in \{(x, y) \mid y = x^2 - px + 2\}$ is waar voor
A geen enkele waarde van p
B precies één waarde van p
C precies twee waarden van p
D meer dan twee waarden van p

14. $ABCD$ is een vierkant.
Voor elk punt P van het gearceerde vlakdeel geldt
(1) $PC \leqq \frac{1}{2} CD$.
(2) $PD \leqq \frac{1}{2} BD$.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



15. De lengten van twee zijden van een driehoek zijn 6 en 8.
Voor de omtrek p van deze driehoek geldt

A $p \leqq 14$
B $14 < p \leqq 16$
C $16 \leq p < 28$
D $28 \leqq p$

16. Gegeven een lijn m en een punt $A \notin m$.
Het aantal cirkels met straal 6, dat door A gaat en tevens aan m raakt, kan *niet* zijn

A 0
B 1
C 2
D 3

17. De functie $f: x \to x^2 - 4x + 5$ heeft $[2, 5]$ als bereik.
Het domein van f kan zijn

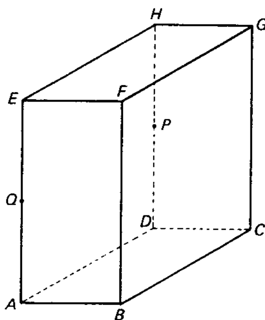
A $[0, 4]$
B $[0, 3]$
C $[0, 1]$
D $[1, 4]$

18. Gegeven zijn de punten $A(1, 6)$ en $B(7, 6)$. Punt C ligt op de x-as.
Het snijpunt van de zwaartelijnen van $\triangle ABC$ ligt op de lijn met vergelijking

A $x = 4$
B $y = 2$
C $y = 3$
D $y = 4$

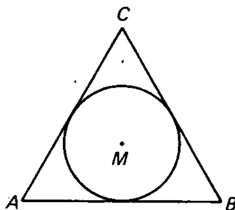
19. Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 2$, $AD = 6$ en $AE = 4$. De punten P en Q zijn de middens van respectievelijk de ribben DH en AE.
Voor de oppervlakte p van $\triangle CPQ$ geldt

A $p < 8$
B $8 \leqq p < 9$
C $9 \leqq p < 10$
D $10 \leqq p$



20. Gegeven de functie $f: x \to 3x + 1$.
   (1) Voor elke p geldt $f(p+1) > f(p)$.
   (2) Voor elke p geldt $f(p+1) = f(p) + 1$.
   A (1) en (2) zijn beide waar
   B (1) is waar en (2) is niet waar
   C (1) is niet waar en (2) is waar
   D (1) en (2) zijn beide niet waar

21. De zijden van een gelijkzijdige driehoek ABC raken een cirkel $(M, 2)$.
   De oppervlakte van $\triangle ABC$ is gelijk aan
   A $6\sqrt{3}$
   B $12\sqrt{3}$
   C 24
   D $24\sqrt{3}$



22. Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 45°$, $AB = 8$ en de oppervlakte is 24.
   Voor de grootte β van hoek B geldt
   A $\beta \leqq 70°$
   B $70° < \beta \leqq 72°$
   C $72° < \beta \leqq 74°$
   D $74° < \beta$

23. Voor $a > 0$ en $b > 0$ snijden de grafieken van $y = ax - b$ en $y = -ax + b$ elkaar op
   A de positieve x-as
   B de negatieve x-as
   C de positieve y-as
   D de negatieve y-as

24. De lijnen l en m snijden elkaar in het punt S.
   $\{P \mid PS = 4 \wedge d(P, l) = d(P, m)\}$ bevat
   A precies één element
   B precies twee elementen
   C precies vier elementen
   D meer dan vier elementen

25. Gegeven is de functie $f: x \to x^2 + 1$.
   Als $f \cap g$ precies twee elementen bevat dan kan g gedefinieerd zijn door
   A $x \to 1$
   B $x \to x$
   C $x \to 2x$
   D $x \to 3x$

26. $\left\{x \mid \frac{x-3}{2} \leqq \frac{x+3}{2}\right\} =$

A ϕ
B $\{x \mid x \leqq 3\}$
C $\{x \mid x \geqq 3\}$
D $\mathbb{R}$

27. $\{x, y) \mid 2x + y = a\} \cap \{(x, y) \mid 2x - 3y = -8\} = \{(b, 2)\}$.
Er geldt
A $a \geqq 0 \wedge b \geqq 0$
B $a \geqq 0 \wedge b < 0$
C $a < 0 \wedge b \geqq 0$
D $a < 0 \wedge b < 0$

28. De grafiek van $x \to -x^2 + 2x + 1$ heeft als top
A $(-1, 2)$
B $(1, 2)$
C $(-1, -2)$
D $(1, -2)$

29. $\{x \mid x = 2x + 5 \vee x = 3x + 5\}$ bevat
A geen element
B precies één element
C precies twee elementen
D meer dan twee elementen

30. Gegeven zijn de vectoren $\vec{v} = \binom{3}{4}$ en $\vec{w} = \binom{3}{3}$.
(1) Er zijn getallen a en b zo dat $a\vec{v} + b\vec{w} = \vec{o}$.
(2) Er zijn getallen c en d zo dat $c\vec{v} + d\vec{w} = \binom{1}{1}$.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

MAVO-3

Maandag 22 augustus, 9.30-11.30 uur

Wiskunde I

(tevens voor LTO-C)

1. Een leraar geeft 15 leerlingen een proefwerk. De behaalde cijfers zijn
9 5 3 10 8 4 3 6 5 8 3 3 10 9 4
De modus van deze getallen is
A 3
B 4
C 5
D 6

2. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x - 1 = 2x - 1\} =$
A ϕ
B $\{0\}$
C $\{1\}$
D $\{-1\}$

3. Het beeld van het punt (4, 5) bij spiegeling in de lijn $x = 2$ is het punt
A (0, 5)
B (5, 0)
C (4, −1)
D (−1, 4)

4. $\{x \mid -\frac{1}{2}x < 2\} =$
A $\{x \mid x < -1\}$
B $\{x \mid x > -1\}$
C $\{x \mid x < -4\}$
D $\{x \mid x > -4\}$

5. Bij een afbeelding is figuur F' het beeld van figuur F.
De oppervlakten van F en F' verhouden zich als 1 en 4.
Deze afbeelding kan zijn
A een rotatie
B een vermenigvuldiging
C een translatie
D een lijnspiegeling

6. De vergelijking $2(x-2) = 2(x-3)$ heeft als oplossingsverzameling
A ϕ
B $\{0\}$
C $\{1\}$
D $\mathbb{R}$

7. Bij een translatie is het punt (2, 1) het origineel van het punt (0, 4).
Deze translatie kan worden voorgesteld door
A $\binom{-2}{3}$
B $\binom{2}{-3}$
C $\binom{-3}{2}$
D $\binom{3}{-2}$

8. $x+2$ is *geen* factor van
A x^2+2x
B x^2+5x+6
C x^2+x-6
D x^2-4

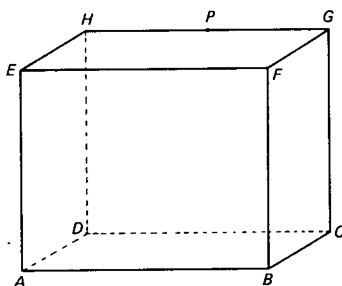
9. De grafiek van $x \to x - px - p$ gaat door het punt $(1, 0)$.
Voor p geldt
A $p = 1$
B $p = \frac{1}{2}$
C $p = -\frac{1}{2}$
D $p = -1$

10. Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 70°$, $\angle B = 50°$ en $\angle C = \gamma$.
Er geldt
A $0 < \sin\gamma \leqq 0{,}25$
B $0{,}25 < \sin\gamma \leqq 0{,}5$
C $0{,}5 < \sin\gamma \leqq 0{,}75$
D $0{,}75 < \sin\gamma \leqq 1$

11. Van rechthoek $ABCD$ is $AB = 3$ en $AC = 6$.
De diagonalen snijden elkaar in punt S.
Voor de grootte α van hoek ASB geldt
A $59° < \alpha \leqq 60°$
B $60° < \alpha \leqq 61°$
C $61° < \alpha \leqq 62°$
D $62° < \alpha \leqq 63°$

12. Van een functie f is $f(-1) = 1$.
Deze functie kan *niet* gedefinieerd zijn door
A $f(x) = x^2$
B $f(x) = 2x^2 + x$
C $f(x) = x^2 + 2x$
D $f(x) = -x^2 - 2x$

13. Van balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 10$, $AD = 6$ en $AE = 8$.
P is het midden van de ribbe GH.
Voor de grootte α van hoek PAH geldt
A $\alpha \leqq 25°$
B $25° < \alpha \leqq 35°$
C $35° < \alpha \leqq 45°$
D $45° < \alpha$

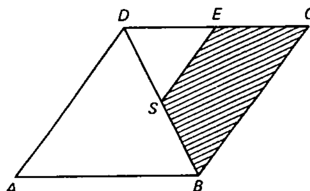


14. De functie f is gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 6x + 5$.
De top van de grafiek van f is
A $(-3, -4)$
B $(3, -4)$
C $(0, -5)$
D $(-1, 0)$

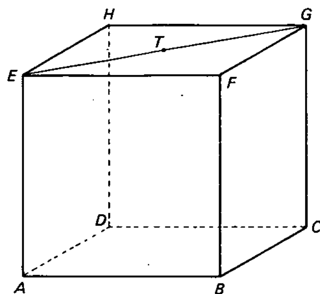
15. De lengten van twee zijden van een driehoek zijn 6 en 8.
Voor de omtrek p van deze driehoek geldt
A $p \leqq 14$
B $14 < p \leqq 16$
C $16 < p < 28$
D $28 \leqq p$

16. Van twee gelijkvormige driehoeken verhouden de omtrekken zich als 9 en 4.
De oppervlakten van deze driehoeken verhouden zich als
A 3 en 2
B 9 en 2
C 9 en 4
D 81 en 16

17. Van ruit $ABCD$ is punt E het midden van zijde CD en punt S het midden van diagonaal BD.
Voor elke punt P binnen vierhoek $BCES$ geldt
A $d(P, AB) \geqq d(P, BC) \wedge d(P, AD) \geqq d(P, BC)$
B $d(P, AB) \geqq d(P, BC) \wedge d(P, AD) \leqq d(P, BC)$
C $d(P, AB) \leqq d(P, BC) \wedge d(P, AD) \geqq d(P, BC)$
D $d(P, AB) \leqq d(P, BC) \wedge d(P, AD) \leqq d(P, BC)$

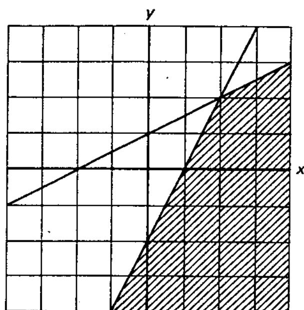


18. Van kubus $ABCD.EFGH$ is punt T het midden van het lijnstuk EG.
Als $AB = 4$ dan is de oppervlakte van $\triangle ACT$
A 8
B $8\sqrt{2}$
C 16
D $16\sqrt{2}$



19. In onderstaande figuur zijn de grafieken van $2y-x=2$ en $2x-y=2$ getekend. Voor de coördinaten x en y van de punten (x, y) van het gearceerde vlakdeel geldt

A $2y-x \geqq 2 \wedge 2x-y \geqq 2$
B $2y-x \geqq 2 \wedge 2x-y \leqq 2$
C $2y-x \leqq 2 \wedge 2x-y \geqq 2$
D $2y-x \leqq 2 \wedge 2x-y \leqq 2$



20. Bij een vermenigvuldiging met centrum $O(0, 0)$ en factor k is het punt $(10, -5)$ het beeld van het punt $(-6, 3)$.
Voor k geldt

A $k = \frac{3}{5}$
B $k = -\frac{3}{5}$
C $k = \frac{5}{3}$
D $k = -\frac{5}{3}$

21. Gegeven zijn de functies $f: x \to 2$,
$g: x \to x+2$ en
$h: x \to 2x$

(1) $f \cap g = \phi$.
(2) $f \cap h = \phi$.

A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

22. Welke van onderstaande functies met $\mathbb{N}$ als domein heeft *geen* origineel van 0?

A $x \to x^2 - 6x + 9$
B $x \to x^2 + 6x + 9$
C $x \to x^2 - 9$
D $x \to x^2 + 6x$

23. Gegeven is $\tan\alpha = -\frac{12}{5} \wedge 0° \leqq \alpha \leqq 180°$.
Er geldt

A $\sin\alpha = \frac{5}{13} \wedge \cos\alpha = -\frac{12}{13}$
B $\sin\alpha = -\frac{5}{13} \wedge \cos\alpha = \frac{12}{13}$
C $\sin\alpha = \frac{12}{13} \wedge \cos\alpha = -\frac{5}{13}$
D $\sin\alpha = -\frac{12}{13} \wedge \cos\alpha = \frac{5}{13}$

24. $V = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 - x < x\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6 - x\}$.
V bevat
A geen element
B precies één element
C precies twee elementen
D meer dan twee elementen

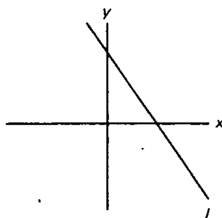
25. De oplossingsverzameling van $x^2 - 4x - 4 = 0$ bevat
A geen element
B precies één element, dit element is positief
C precies één element, dit element is negatief
D precies twee elementen

26. Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x + 1\}$ en $W = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x - 1\}$.
Er geldt
A $V \cap W = \phi$
B $V \cap W = \{(p, q)\}$ met $p > q$
C $V \cap W = \{(p, q)\}$ met $p = q$
D $V \cap W = \{(p, q)\}$ met $p < q$

27. Van een kubus met ribbe 1 zijn alle hoekpunten met elkaar verbonden door lijnstukken.
De lengte van zo'n verbindingslijnstuk kan *niet* zijn
A 1
B $\sqrt{2}$
C $\sqrt{3}$
D 2

28. $\{(x, y) \mid 2x + y = a\} \cap \{(x, y) \mid 2x - 3y = -8\} = \{(b, 2)\}$.
Er geldt
A $a \geqq 0 \wedge b \geqq 0$
B $a \geqq 0 \wedge b < 0$
C $a < 0 \wedge b \geqq 0$
D $a < 0 \wedge b < 0$

29. De in onderstaande figuur getekende lijn l kan als vergelijking hebben
A $y = -1\frac{1}{2}x - 3$
B $y = 1\frac{1}{2}x - 3$
C $y = -1\frac{1}{2}x + 2$
D $y = 1\frac{1}{2}x + 2$



30. $V = \{(x, y) \mid x = 3 \vee y = 3\}$.
V bevat *geen* punten uit het
A eerste kwadrant
B tweede kwadrant
C derde kwadrant
D vierde kwadrant

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

MAVO-4

Donderdag 25 augustus, 9.30-11.30 uur

Wiskunde II

1. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ en $C(1, 5)$.
De grafiek van een functie $f: x \to -x^2 + px + q$ gaat door de punten A en B.
a. Bereken p en q.
b. Toon door berekening aan dat C de top van de grafiek van f is.
c. Bewijs dat de lijn AB loodrecht staat op de lijn BC.
d. Door de punten A, B en C gaat een cirkel.
Stel een vergelijking op van deze cirkel.

2. Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 16$, $BC = 12$ en $CG = 15$.
Op de ribbe CG ligt het punt P zo dat $CP = \frac{1}{5}CG$.
a. Bereken de omtrek van $\triangle BHP$.
b. Bereken in graden nauwkeurig $\angle BHP$.
c. De lijn HP snijdt het verlengde van de ribbe CD in punt Q.
Toon aan dat $\triangle BHQ$ gelijkbenig is.

3. Van een driehoek ABC is punt O het midden van de zijde AB.
$\vec{OA} = \vec{a}$ en $\vec{OC} = \vec{c}$.
Op het verlengde van lijnstuk AC ligt een punt P zo dat $AC = CP$.
a. Druk $\vec{OP}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{c}$.
Op lijnstuk BC ligt een punt Q zo dat $BQ : QC = 2 : 1$.
b. Druk $\vec{OQ}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{c}$.
c. Toon aan dat O, P en Q op één lijn liggen.

4. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(6, 0)$, $B(0, 8)$, $C(-4, 0)$ en $M(0, 3)$.
Bij spiegeling in een lijn n is B het beeld van C.
a. Stel een vergelijking op van n en bewijs dat n door A gaat.
b. Onderzoek of M een dekpunt is van de spiegeling.
c. Toon aan dat de afstand van M en de lijn AB gelijk is aan 3.
d. De zijden van $\triangle OAB$ sluiten een vlakdeel V in.
Het vlakdeel W is de puntenverzameling $\{P \in V \mid PM \geqq 3\}$.
Arceer in een figuur het vlakdeel W.

EXAMEN MIDDELBAAR ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

MAVO-3

Donderdag 25 augustus, 9.30-11.30 uur

Wiskunde II

(tevens voor LTO-C)

1. Gegeven is een lijnstuk AB met lengte 6.
Bij een rotatie met het punt A als centrum over een hoek van 130° is punt B' het beeld van B.
a. Bereken $\angle ABB'$.
b. Bereken de afstand van B' en de lijn AB in één decimaal nauwkeurig.
c. Bereken BB' in één decimaal nauwkeurig.

2. Met $[0, 5]$ als domein zijn de functies f en g gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 6x + 9$ en $g(x) = -x^2 + 4x + 1$.
a. Los op $f(x) = g(x)$.
b. Bereken het minimum van f en het maximum van g.
c. Teken de grafieken van f en g in een rechthoekig assenstelsel.
d. De functie h is gedefinieerd door $h(x) = \dfrac{f(x) + g(x)}{2}$.
Bereken het bereik van h.

3. Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 6$ en $AD = AE = 3$.
Het midden van de ribbe EF is het punt M.
Het verlengde van het lijnstuk BM snijdt het verlengde van de ribbe AE in het punt S.
a. Bewijs $BS = 2BG$.
b. Bereken $\angle MBG$.
c. Bewijs dat $\triangle BGS$ rechthoekig is.

4. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de lijnen
l met vergelijking $x - 2y = 0$ en
m met vergelijking $3x - y = 5$.
Het snijpunt van l en m is het punt S.
Verder zijn gegeven de punten $A(-2, -1)$ en $B(1, -2)$.
a. Toon aan dat A op l en B op m ligt.
b. Bewijs dat $OA = OB = OS$.
Bij spiegeling in l is B' het beeld van B en m' het beeld van m.
c. Bewijs dat vierhoek $ABSB'$ een vierkant is.
d. Stel een vergelijking op van m'.

HER- OF UITGESTELD EXAMEN LAGER BEROEPSONDERWIJS IN 1977 (volgens C-programma)

Maandag 22 augustus, 9.30-11.30 uur

Wiskunde (LHNO, LEAO en LMO)
(meerkeuzetoets)

(Het LLO heeft voor de vakantie een apart herexamen afgenomen om de leerlingen de gelegenheid niet te onthouden gedurende de vakantie landarbeid te verrichten.)

1. Een leraar geeft 15 leerlingen een proefwerk. De behaalde cijfers zijn
9 5 3 10 8 4 3 6 5 8 3 3 10 9 4
De modus van deze getallen is
A 3
B 4
C 5
D 6

2. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x - 1 = 2x - 1\} =$
A ϕ
B $\{0\}$
C $\{1\}$
D $\{-1\}$

3. Het beeld van het punt (4, 5) bij spiegeling in de lijn $x = 2$ is het punt
A (0, 5)
B (5, 0)
C (4, −1)
D (−1, 4)

4. $6x - 24 > 2x - 8$ is gelijkwaardig met
   A $x > 4$
   B $x < 4$
   C $x > -8$
   D $x < -2$

5. Bij een afbeelding is een figuur F' het beeld van figuur F.
   De oppervlakten van F en F' verhouden zich als 1 en 4.
   Deze afbeelding kan zijn
   A een rotatie
   B een vermenigvuldiging
   C een translatie
   D een lijnspiegeling

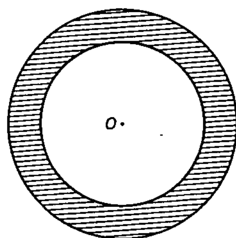
6. De vergelijking $2(x-2) = 2(x-3)$ heeft als oplossingsverzameling
   A ϕ
   B $\{0\}$
   C $\{1\}$
   D $\mathbb{R}$

7. Bij een translatie is het punt (2, 1) het origineel van het punt (0, 4).
   Deze translatie kan worden voorgesteld door
   A $\binom{-2}{3}$
   B $\binom{2}{-3}$
   C $\binom{-3}{2}$
   D $\binom{3}{-2}$

8. $x+2$ is *geen* factor van
   A $x^2 + 2x$
   B $x^2 + 5x + 6$
   C $x^2 + x - 6$
   D $x^2 - 4$

9. Gegeven is de functie $f: x \rightarrow x^2 - 6x + 8$.
   De symmetrie-as van de grafiek van f gaat door het punt
   A $(-3, 2)$
   B $(2, 2)$
   C $(3, 2)$
   D $(-4, 2)$

10. In nevenstaande figuur zijn twee cirkels getekend met middelpunt O en straal respectievelijk 5 en 7.
    De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel is
    A 2π
    B 4π
    C 24π
    D 48π



11. Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = AC$.
De deellijn van hoek A snijdt zijde BC in punt E. $\angle EAB = 37°$.
$\angle ABC =$
A 37°
B 53°
C 74°
D 90°

12. Van een functie f is $f(-1) = 1$.
Deze functie kan *niet* gedefinieerd zijn door
A $f(x) = x^2$
B $f(x) = 2x^2 + x$
C $f(x) = x^2 + 2x$
D $f(x) = -x^2 - 2x$

13. Gegeven is de ongelijkheid $2x - 3 < 11$ en $x \in \mathbb{N}$.
De oplossingsverzameling is
A ϕ
B $\{0, 1, 2, 3\}$
C $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
D $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

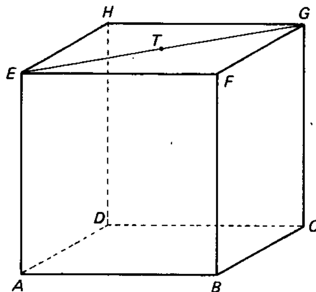
14. De functie f is gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 6x + 5$.
De top van de grafiek van f is
A $(-3, -4)$
B $(3, -4)$
C $(0, -5)$
D $(-1, 0)$

15. De lengten van twee zijden van een driehoek zijn 6 en 8.
Voor de omtrek p van deze driehoek geldt
A $p \leqq 14$
B $14 < p \leqq 16$
C $16 < p < 28$
D $28 \leqq p$

16. Van twee gelijkvormige driehoeken verhouden de omtrekken zich als 9 en 4.
De oppervlakten van deze driehoeken verhouden zich als
A 3 en 2
B 9 en 2
C 9 en 4
D 81 en 16

17. Gegeven zijn de functies $f: x \to 2x - 2$ en $g: x \to \frac{1}{2}x - 2$.
Het snijpunt van de grafieken van f en g is
A (0, 0)
B (−2, 0)
C (−2, −2)
D (0, −2)

18. Van kubus $ABCD.EFGH$ is punt T het midden van het lijnstuk EG.
Als $AB = 4$ dan is de oppervlakte van $\triangle ACT$
A 8
B $8\sqrt{2}$
C 16
D $16\sqrt{2}$



19. Gegeven zijn de functies $f: x \to 2x - 4$ en $g: x \to \frac{1}{2}x + 2$.
$f(x) < g(x)$ is gelijkwaardig met
A $x < -4$
B $x > -4$
C $x < 4$
D $x > 4$

20. Punt $Q(-4, 5)$ wordt gespiegeld ten opzichte van het punt $O(0, 0)$.
Het beeld van Q is het punt
A (4, 5)
B (−4, −5)
C (−4, 5)
D (4, −5)

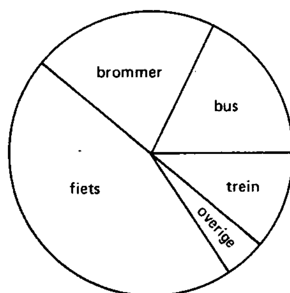
21. Gegeven zijn de functies $f: x \to 2$,
$g: x \to x + 2$ en
$h: x \to 2x$.
(1) $f \cap g = \phi$.
(2) $f \cap h = \phi$.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

22. De verzameling $\{-3, 5\}$ is de oplossingsverzameling van
A $x^2 - 2x - 15 = 0$
B $x^2 - 2x + 15 = 0$
C $x^2 + 2x - 15 = 0$
D $x^2 + 2x + 15 = 0$

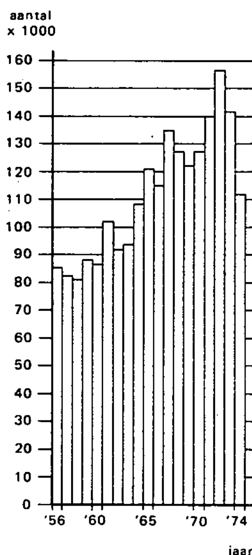
23. Uit onderstaande frequentietabel is af te leiden:
(1) het gemiddelde van de behaalde cijfers is 6.
(2) de mediaan van de behaalde cijfers is $6\frac{1}{2}$.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

cijfer	aantal leerlingen dat het cijfer behaalde
1	2
2	3
3	4
4	4
5	6
6	6
7	12
8	6
9	4
10	3

24. Een school heeft 540 leerlingen.
De manier waarop ze naar school komen wordt aangegeven in dit cirkeldiagram.
Het aantal leerlingen dat met de bus komt is
A kleiner dan of gelijk aan 90
B groter dan 90, maar kleiner dan of gelijk aan 98
C groter dan 98, maar kleiner dan of gelijk aan 106
D groter dan 106



25. In onderstaand diagram is aangegeven hoeveel apparaten een fabriek geproduceerd heeft in de jaren 1956 tot en met 1974.
De grootste stijging van de jaarproduktie t.o.v. het voorafgaande jaar kwam voor in
A 1961
B 1964
C 1967
D 1972



26. $(x + 2)\cdot(x - 3) =$
A $x^2 - 6x - 5$
B $x^2 - 5x - 6$
C $x^2 - x - 5$
D $x^2 - x - 6$

27. Van een kubus met ribbe 1 zijn alle hoekpunten met elkaar verbonden door lijnstukken.
De lengte van zo'n verbindingslijnstuk kan *niet* zijn
A 1
B $\sqrt{2}$
C $\sqrt{3}$
D 2

28. Het snijpunt van de rechte lijnen $2x + y = 1$ en $4x + y = -1$ is
A $(-1, 1)$
B $(-1, 3)$
C $(1, -3)$
D $(1, -1)$

29. De grafiek van de functie $f: x \rightarrow -3$ gaat door de punten
A $(0, -3)$ en $(6, -3)$
B $(-3, 0)$ en $(-3, 6)$
C $(0, 0)$ en $(0, -3)$
D $(0, 0)$ en $(-3, 0)$

30. $V = \{(x, y) \mid x = 3 \vee y = 3\}$.
V bevat *geen* punten uit het
A eerste kwadrant
B tweede kwadrant
C derde kwadrant
D vierde kwadrant

HER- OF UITGESTELD EXAMEN LAGER BEROEPSONDERWIJS IN 1977 (volgens C-programma)

Donderdag 25 augustus, 9.30-11.30 uur

Wiskunde (LHNO, LEAO en LMO)

(Open vragen)

OPGAVE 1

In een bepaalde periode verkocht een bloemist op verschillende dagen de volgende aantallen kamerplanten:
10–14–19–20–21–17–14–9–6–8–7–14–16–11–9–11–13–15–14–12–8–6–13–8–7–9

Gevraagd:
a. Bereken het gemiddeld aantal verkochte planten per dag (afronden op een geheel getal).
b. Noteer de mediaan van deze rij gegevens.
c. Noteer de modus van deze rij gegevens.
d. Verwerk de gegevens tot een staafdiagram met klasse-indeling 0–1, 2–3, 4–5, enz.

OPGAVE 2

Gegeven: De functies f, g en h gedefinieerd door
$f(x) = 2x + 4$, $g(x) = 1 - x$ en $h(x) = 4$
Het domein van deze functies is $[-4, 2]$.

Gevraagd:
a. Bereken $f(-3)$.
b. Voor welke x geldt $g(x) = -1$?
c. Teken de grafieken van f, g en h in één rechthoekig assenstelsel XOY.
d. Het snijpunt van de grafieken van f en g is S.
Bereken de coördinaten van punt S.
e. Voor welke x geldt $g(x) \leqq h(x)$?

f. Het snijpunt van de grafieken van f en h is T.
Het snijpunt van de grafieken van g en h is U.
Bereken de oppervlakte van driehoek STU.

OPGAVE 3

Gegeven: De functies f en g gedefinieerd door
$f(x) = x^2 - 5x + 4$ en $g(x) = 2x - 6$
Het domein van beide functies is $[-1, 6]$.

Gevraagd:
a. Teken de grafieken van f en g in één rechthoekig assenstelsel XOY.
b. Noteer het bereik van de functie g.
c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de x-as.
d. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.
e. Voor welke x bereikt f zijn minimumwaarde?

OPGAVE 4

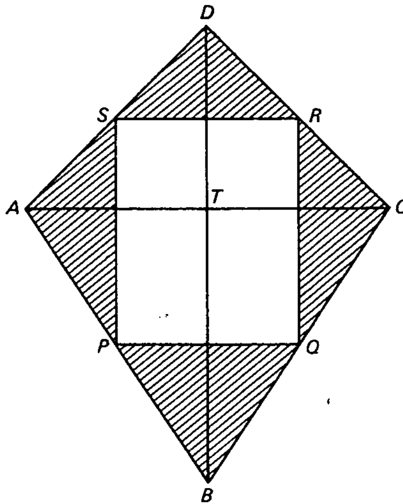
Gegeven: De punten $A(1, 1)$ en $C(1, 3)$. Bij vermenigvuldiging van lijnstuk AC vanuit een zeker punt P is $A'(4, -2)$ het beeld van A en $C'(4, 6)$ het beeld van C.

Gevraagd:
a. Teken de lijnstukken AC en $A'C'$ in het assenstelsel XOY.
b. Noteer de coördinaten van punt P.
c. Bereken de omtrek van het trapezium $AA'C'C$.
d. Bereken de oppervlakte van driehoek $PA'C'$.

OPGAVE 5

Gegeven: Een vlieger $ABCD$.
P is het midden van zijde AB.
Q is het midden van zijde BC.
R is het midden van zijde CD.
S is het midden van zijde DA.
T is het snijpunt van de diagonalen.
$PQ = 4$ cm.
$PS = 5$ cm.
$DT = TC$.

Gevraagd:
a. Bereken de oppervlakte van de gegeven vlieger.
b. Bereken de omtrek van de vlieger.
c. Bereken de oppervlakte van het gearceerde deel.



EXAMEN HOGER ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1977

Maandag 22 augustus, 9.30-12.30 uur

Wiskunde

1. In R_2 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven de lijn l met vergelijking $x + 2y - 3 = 0$ en de parabool p met vergelijking $y^2 + 4x + 4 = 0$.
   a. Bewijs dat l en p elkaar raken en bereken de coördinaten van het raakpunt.
   Gegeven is de verzameling
   $V = \{x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + 2y - 3 \leqq 0 \wedge y^2 + 4x + 4 \geqq 0 \wedge 0 \leqq y \leqq 4\}$.
   b. Teken V.
   c. Welke waarden kan $x + 2y$ aannemen in het geval dat $(x, y) \in V$ is?

2. In R_3 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven het punt $A(0, 1, 1)$ en voor elke $p \in \mathbb{R}$ het vlak V_p met vergelijking $x + 2y + pz = 5$.
   a. De lijn l is de lijn door A loodrecht op het vlak V_1.
   Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en V_1.
   b. Bereken de hoek van de lijn OA en het vlak V_1.
   c. De afstand van A en V_p is gelijk aan 1.
   Bereken p.

3. Met domein $[0, 2\pi]$ is voor elke $p \in \mathbb{R}^+$ gegeven de functie
$f_p : x \to -3 + p \sin^2 x$.
   a. Los op: $f_2(x) = \cos 2x$.
   b. Druk het bereik van f_p uit in p.
   c. Voor welke $p \in \mathbb{R}^+$ heeft de vergelijking $f_p(x) = 0$ vier verschillende oplossingen?

4. Gegeven zijn van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ de functie $f: x \to 3 - x + 2\sqrt{x}$ en voor elke $p \in \mathbb{R}$ de functie $g_p : x \to 2x + p$.
   a. Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f.
   b. Bereken de hoek waaronder de grafiek van f de x-as snijdt in graden nauwkeurig.
   c. De grafieken van f en g_p snijden elkaar loodrecht.
   Bereken p.

5. In een doos zitten 10 kaarten.
Op elke kaart staat één cijfer.
Op één kaart staat het cijfer 1.
Op twee kaarten staat het cijfer 2.
Op drie kaarten staat het cijfer 3.
Op vier kaarten staat het cijfer 4.
Men neemt aselect viermaal achtereen zonder terugleggen een kaart uit de doos en legt die kaarten in volgorde van trekking van links naar rechts voor zich op tafel met het cijfer boven, zodat een getal van vier cijfers ontstaat.
   a. Hoe groot is de kans dat op deze manier het getal 2143 gevormd wordt?
   b. Hoe groot is de kans dat het getal 2233 gevormd wordt?
   c. Hoe groot is de kans dat het gevormde getal geen 2 en geen 3 bevat?
   d. Hoe groot is de kans dat het gevormde getal groter is dan 4300?

EXAMEN VOORBEREIDEND WETENSCHAPPELIJK ONDERWIJS IN 1977

Maandag 22 augustus, 9.30-12.30 uur

Wiskunde I

1. Gegeven zijn de functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$
$f: x \to \ln(2x + 4)$ en $g : x \to \ln |x|$.
   a. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.
   Teken in één figuur de grafieken van f en g.
   b. De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.

De raaklijn in A aan de grafiek van f en de raaklijn in B aan de grafiek van g snijden elkaar loodrecht.
Bereken p.

c. De lijn met vergelijking $y = q$ snijdt de grafiek van f in punt P en de grafiek van g in de punten Q en R waarbij Q het midden is van het lijnstuk PR.
Bereken q.

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking $\cos x \, dy = (1 - y \sin x) dx$.
   a. Teken voor $x \in [0, 2\pi]$ de verzameling van de niet-singuliere punten waarin het lijnelement dat aan de differentiaalvergelijking voldoet, evenwijdig aan de x-as is.
   b. Er zijn integraalkrommen van deze differentiaalvergelijking die de lijn met vergelijking $y = 2$ raken.
   Bereken de coördinaten van de raakpunten.
   c. Voor welke $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ is $y = a \cos x + b \sin x$ een oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking?

3. Voor elke $p \in \mathbb{R}^+$ is de functie f_p met domein $\mathbb{R}$ gegeven door $x \rightarrow \dfrac{e^x}{p + e^x}$.
   a. Bewijs dat f_p een stijgende functie is.
   Wat is het bereik van f_p?
   b. Bewijs dat de grafiek van f_p het beeld is van de grafiek van f_1 bij een translatie evenwijdig aan de x-as.
   c. Bereken p in het geval dat voor elke $a \in \mathbb{R}^+$ geldt: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f_p(x) dx = a$.

4. Een speelautomaat bevat vijf schijven die onafhankelijk van elkaar kunnen draaien.
   Op iedere schijf staan de cijfers 0 tot en met 9.
   Door een venster is van elke schijf precies één cijfer zichtbaar.
   Door een druk op een knop worden de schijven aan het draaien gebracht.
   Na verloop van enige tijd staat iedere schijf weer stil.
   Door het venster zijn dan vijf cijfers zichtbaar.
   De cijfers zijn zo over iedere schijf verdeeld dat elk cijfer dezelfde kans heeft zichtbaar te worden.
   De stochast X is het aantal cijfers 6 dat zichtbaar is.
   De stochast Y is het aantal cijfers 7 dat zichtbaar is.
   De stochast Z is gedefinieerd door $Z = X + Y$.
   a. Stel de kansverdeling op van de stochast X.
   b. Onderzoek of de stochasten X en Y onafhankelijk zijn.
   c. Bereken $P(Z = 2)$.
   d. A beweert dat de automaat zuiver is.
   B beweert dat de cijfers 6, 7, 8 en 9 te weinig optreden.
   Zij besluiten tot een toets waarbij vier keer gespeeld zal worden.
   Als de som van de frequenties van de cijfers 6, 7, 8 en 9 kleiner is dan vijf, krijgt A ongelijk. Hoe groot is de kans dat A ten onrechte ongelijk krijgt?

EXAMEN VOORBEREIDEND WETENSCHAPPELIJK ONDERWIJS IN 1977

Donderdag 25 augustus, 9.30-12.30 uur

Wiskunde II

1. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven het vlak V met vergelijking $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
en de lijn $l : \bar{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   a. Bereken de afstand van l en de x_3-as.
   b. A is een punt van l en B is een punt van de x_3-as.
   De lijn AB is evenwijdig aan het vlak V.
   M is het midden van het lijnstuk AB.
   Stel een vectorvoorstelling op van de verzameling van de punten M.
   c. Een vlak W door l maakt met V en hoek van 45°.
   Stel een vergelijking van W op.

2. In R_3 is ten opzichte van een orthonormale basis gegeven het vlak V met vergelijking $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en voor elke $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
de afbeelding $A_{a,b}$ met matrix $\begin{pmatrix} 2a & a & 0 \\ -2b & -b & a-b \\ a+b & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Voor welke $p \in \mathbb{R}$ behoort $(p - 1, 0, p)$ tot het $A_{2,1}$-beeld van V?
   b. Voor welke a is $A_{a,1}$ een singuliere afbeelding?
   Bewijs dat het volledig origineel van de lijn $\bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bij elke reguliere afbeelding $A_{a,1}$ in V ligt.
   c. Het vlak met vergelijking $x_3 = 0$ wordt door $A_{a,b}$ afgebeeld op een lijn l in dat vlak waarbij de punten van l invariant zijn.
   Bereken a en b.

3. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $P(4, 4, 0)$, $Q(0, 4, 0)$ en $R(2, 2, 4)$.
A is een spiegeling in het vlak OPR en B is een spiegeling in het vlak OQR.
   a. Bewijs dat $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ de matrix van de afbeelding $B \circ A$ is.
   b. Gegeven is dat de afbeelding $B \circ A$ een draaiing is om een lijn over een hoek φ.
   Stel een vectorvoorstelling van deze lijn op en bereken $\cos\varphi$.

c. Het middelpunt M van een bol β met straal $\sqrt{2}$ ligt op de lijn $l : \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Het A-beeld van β raakt het B-beeld van β.
Bereken de coördinaten van M.

Mededeling

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1978

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1978 zal plaats vinden op *donderdag 16 maart a.s.*
Er kan aan worden deelgenomen door leerlingen van de vierde en de vijfde klas van het VWO en dit jaar, naar aanleiding van verschillende verzoeken, ook door leerlingen van de vierde klas van het HAVO.
De organisatie is gelijk aan die van de voorgaande jaren: Eind februari of begin maart ontvangen alle scholen voor VWO/HAVO een aantal exemplaren van het opgavenblad, een correctiesleutel en een resultatenformulier. De zending zal gericht zijn aan: *De wedstrijdleider van de Wiskunde Olympiade.*
Op scholen waar men de leerlingen gelegenheid wil geven aan de Olympiade mee te doen, moet dus een wedstrijdleider benoemd worden. Deze zorgt voor vermenigvuldiging van de opgaven, bepaalt de plaats waar op zijn school de eerste ronde gehouden zal worden, houdt daarbij toezicht en kijkt het gemaakte werk na. Voor het gemak en ook een eenvormige beoordeling te bevorderen worden alleen uitkomsten gevraagd, geen beredeneringen en berekeningen.
De wedstrijdleiders noteren de resultaten op het resultatenformulier, dat zij naar het secretariaat van de Wiskunde Olympiade opsturen.
Het secretariaat zoekt uit de resultatenformulieren een tachtigtal deelnemers met de hoogste score, vraagt van hun bij de wedstrijdleiders de bladen met uitwerkingen op en nodigt hun, na controle van de blaadjes, uit om deel te nemen aan de tweede ronde, die op vrijdag 1 september in Utrecht gehouden zal worden.
Uit de tweede ronde zullen tien prijswinnaars komen, terwijl voor acht deelnemers de mogelijkheid bestaat mee te doen aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1979.
Aan de eerste ronde zal ook deelgenomen kunnen worden door eerstejaars studenten met HAVO vooropleiding aan lerarenopleidingen voor de tweede en derde graad. Er wordt nog bekeken of die deelname al dan niet buiten mededinging zal zijn.

Drs. J. van Dormolen, secretaris
Budapestlaan 6, Utrecht

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

Drs. S. P. van 't Riet, Schouw 18, Blaricum